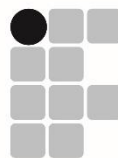


**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA**
Departamento Acadêmico da Construção Civil
Curso Técnico em Agrimensura

MATEMÁTICA APLICADA À TOPOGRAFIA

**SÉRIE: TOPOGRAFIA E AGRIMENSURA PARA CURSOS
TÉCNICOS**

**Prof. Angelo Martins Fraga
Prof. Renato Zetehaku Araujo**



**INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA**

**Florianópolis-SC
2018**



Curso Técnico em Agrimensura:

Av. Mauro Ramos, 950, Centro, Florianópolis - Santa Catarina

CEP: 88020-300

Telefone: (48) 3321-6061

sites.florianopolis.ifsc.edu.br/agrimensura

Reitoria:

Rua 14 de Julho, 150, Coqueiros, Florianópolis - Santa Catarina

CEP: 88075-010

Telefone: (48) 3877-9000 / Fax: (48) 3877-9060

www.ifsc.edu.br

Reprodução total ou parcial dessa obra autorizada pelos autores e pela instituição para fins educativos e não comerciais.

Catálogo na fonte pelo Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de Santa Catarina - IFSC
Reitoria

F811m

Fraga, Angelo Martins

Matemática aplicada à topografia: topografia e agrimensura para cursos técnicos [recurso eletrônico] / Angelo Martins Fraga, Renato Zetehaku Araújo – Florianópolis: IFSC, 2018.

1 Livro digital.

44 p.: il.

Inclui referências.

ISBN 97885XXXXXXX

1. Altimetria. 2. Topografia. 3. Nivelamento. I. Araújo, Renato Zetehaku.
II. Título.

CDD 526.98

Sistema de Bibliotecas Integradas do IFSC

Biblioteca Dr. Hercílio Luz – Câmpus Florianópolis

Catalogado por: Edinei Antonio Moreno CRB 14/1065



Sumário

1.	SISTEMA ANGULAR INTERNACIONAL.....	1
1.1.	Radiano	1
1.2.	Grau	1
1.2.1.	Conversões de Ângulo	1
1.2.2.	Tipos de Ângulos.....	2
1.3.	EXERCÍCIOS	2
2.	TRIGONOMETRIA	4
2.1.	Teorema de Pitágoras	4
2.2.	Medidas Trigonométricas	5
2.3.	Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo.....	5
2.3.1.	Exercícios.....	6
2.4.	Lei dos Senos	9
2.5.	Lei dos Cossenos.....	9
2.6.	Cálculos de ângulos:	10
2.7.	Exercícios:	10
3.	GEOMETRIA ANALÍTICA	13
3.1.	Distância entre dois pontos na reta.....	13
3.2.	Eixos Coordenados.....	13
3.2.1.	Exercício:	15
3.3.	Distância entre dois pontos no plano cartesiano	15
3.3.1.	Exercícios:.....	16
3.4.	Ponto médio de um segmento	16
3.5.	Área de um triângulo no plano cartesiano	17
3.5.1.	Exemplo	17
3.5.2.	Exercícios:.....	18
3.6.	Cálculo de Coordenadas:	20
3.6.1.	Retangulares Polares	20
3.6.2.	Exercício:	21
4.	GEOMETRIA PLANA	22
4.1.	Áreas das figuras geométricas planas:	22
4.2.	Área da região retangular:.....	22
4.2.1.	Exercícios:.....	22
4.3.	Área da região quadrada:	23
4.3.1.	Exercícios:.....	23
4.4.	Área da região limitada por um paralelogramo:	23
4.4.1.	Exercícios.....	24
4.5.	Área da região triangular:.....	24



4.5.1. Exercícios:.....	25
4.6. Área de uma região limitada por um triângulo retângulo:.....	25
4.6.1. Exercícios:.....	26
4.7. Área de uma região limitada por um triângulo equilátero:.....	26
4.7.1. Exercício:	27
4.8. Área da região triangular	27
4.8.1. Exercício:	27
4.9. Área da região limitada por um losango:	28
4.9.1. Exercício:	28
4.10. Área da região limitada por um trapézio:.....	29
4.10.1. Exercícios:	29
4.11. Área do círculo:	29
4.11.1. Exercícios :	30
5. GEOMETRIA ESPACIAL	31
5.1. Prismas	31
5.2. Pirâmides	32
5.3. Tronco de Pirâmide.....	32
5.4. Cilindros.....	32
5.5. Cone.....	33
5.6. Tronco de cone.....	33
5.7. Esfera	34
5.8. Exercícios:	34

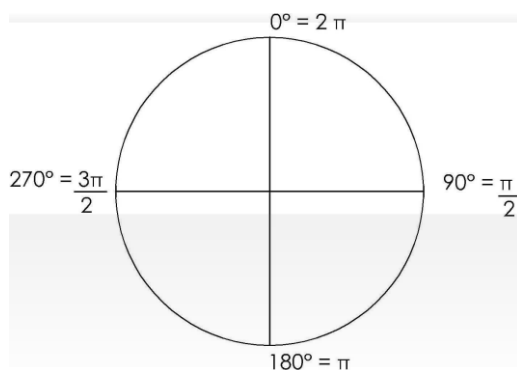
1. SISTEMA ANGULAR INTERNACIONAL

1.1. RADIANO

É o arco cujo comprimento é igual a medida do raio da circunferência que o contém. A abreviação é Rad.

1.2. GRAU

Dividindo uma circunferência em 360° partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de 1°



1.2.1. CONVERSÕES DE ÂNGULO

Graus para Radianos

$$\text{Rad} = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$$

Obs: α é grau decimal

Radianos para Graus

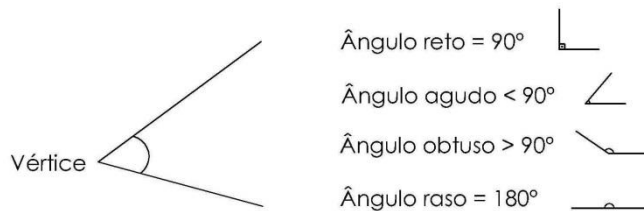
$$\text{Graus} = \frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$$

Obs: α é radiano

Sistema decimal = os decimais vão até 100 Sistema Sexagesimal = os decimais vão até 60;



1.2.2. TIPOS DE ÂNGULOS



Transformação centesimal em sexagesimal e vice-versa. $36,077778^\circ$ centesimal = $36^\circ 04' 40''$ sexagesimal

1.3. EXERCÍCIOS

1. Converter os ângulos do sistema sexagesimal para o sistema centesimal:

- a) $45^\circ 22' 12'' =$
- b) $51^\circ 04' 59'' =$
- c) $98^\circ 56' 58'' =$
- d) $77^\circ 44' 32'' =$
- e) $8^\circ 59' 59'' =$

Converter os ângulos abaixo do sistema centesimal para o sistema sexagesimal:

- a) $46,994155^\circ$
- b) $36,599277^\circ$
- c) $58,020222^\circ$
- d) $91,121224^\circ$
- e) $21,124433^\circ$

Dados os ângulos a seguir, calcular o resultado das operações (os resultados deverão estar no sistema sexagesimal):

- a) $45^\circ 22' 12'' + 98^\circ 56' 58'' =$
- b) $77^\circ 44' 32'' + 31^\circ 04' 59'' =$
- c) $8^\circ 59' 59'' + 36,599277^\circ =$



d) $46,994195^{\circ} + 36,58769^{\circ} =$

e) $95^{\circ}12'12'' - 91^{\circ}56'51'' =$

f) $187^{\circ}47'22'' - 41^{\circ}14'19'' =$

g) $77^{\circ}44'32'' - 51^{\circ}04'59'' =$

h) $67^{\circ}44'36'' - 58^{\circ}04'32'' =$

i) $95^{\circ}23'12'' \cdot 9 =$

j) $57^{\circ}43'38'' \cdot 5 =$

k) $187^{\circ}47'22'' \cdot 2 =$

l) $77^{\circ}44'22'' \cdot 7 =$

m) $67^{\circ}31'41'' \cdot 5 =$

n) $187^{\circ}47'22'' \cdot 7 =$

o) $95^{\circ}46'38'' / 4 =$

p) $180^{\circ}01'00'' / 2 =$

q) $77^{\circ}41'57'' / 3 =$

r) $127^{\circ}41'41'' / 2 =$

s) $905^{\circ}41'07'' / 7 =$

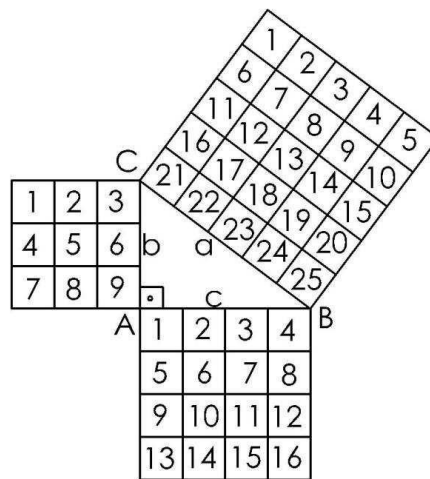


2. TRIGONOMETRIA

Trigonometria (do grego trígono - triângulo e metron - medida) é parte da matemática, que nos oferece ferramentas para a resolução de problemas que envolvem figuras geométricas, principalmente os triângulos.

O homem desde os tempos mais remotos tem a necessidade de mensurar distâncias entre dois pontos, estes muitas vezes, localizados em lugares de difícil acesso ou até mesmo inacessíveis. Devido a estas dificuldades, destaca-se a trigonometria como uma ferramenta importante no auxílio as medições indiretas.

2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS



$$a^2 = b^2 + c^2$$

No teorema de Pitágoras “o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16$$

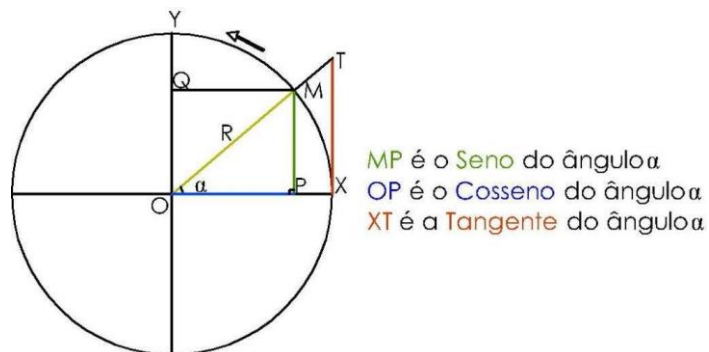
$$a^2 = 25$$

$$a = 5 \text{ u.m.}$$

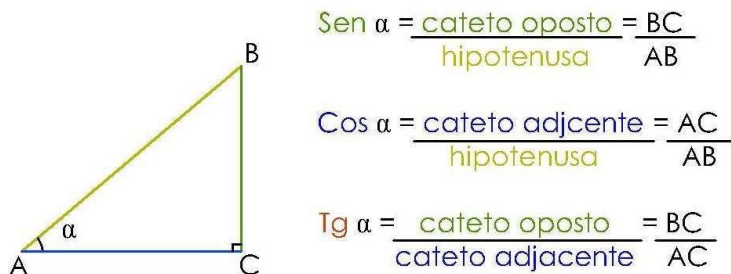


2.2. MEDIDAS TRIGONOMÉTRICAS

Considerando XOY um sistema de coordenadas plano ortogonal, desenhando uma circunferência com o centro na origem O e com raio 1, temos:



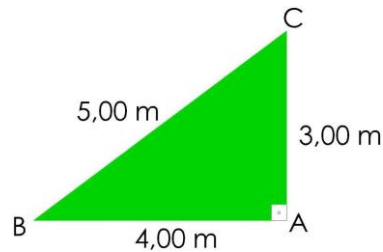
2.3. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TRIANGULO RETÂNGULO



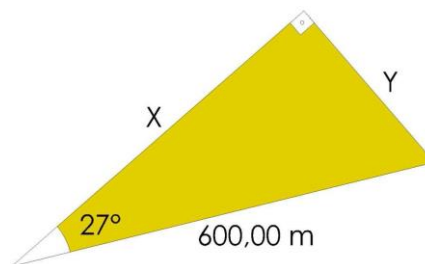


2.3.1. EXERCÍCIOS

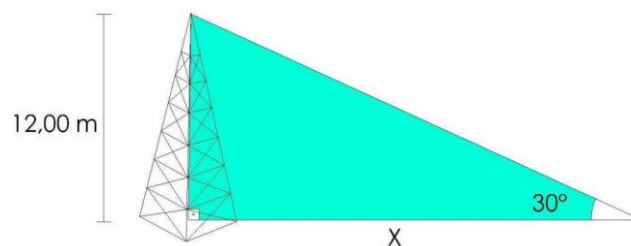
1. Dado o triângulo retângulo, calcular $\sin B$, $\cos B$ e $\tan B$.



2. Calcule x e y no triângulo da figura.



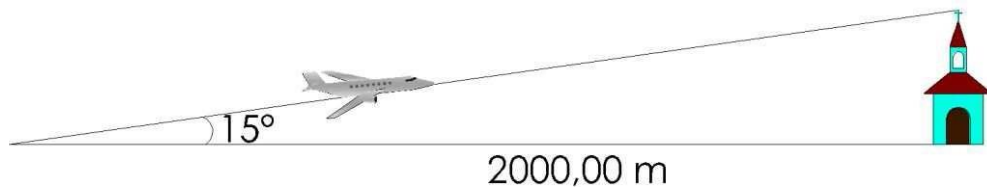
3. Uma torre vertical de altura 12,00 m é vista sob um ângulo de 30° por uma pessoa que se encontra a uma distância x da sua base e cujos olhos estão no mesmo plano horizontal dessa base. Determinar a distância x .



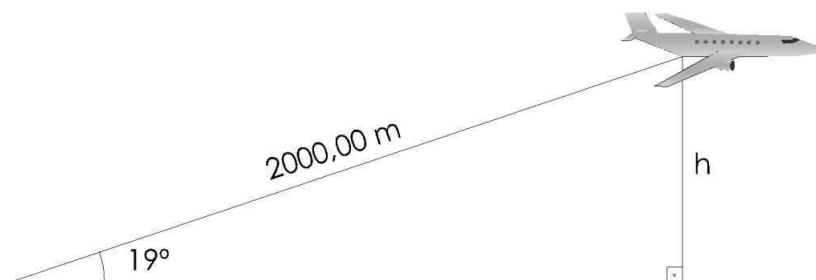


4. Num exercício de tiro, o alvo se encontra numa parede cuja base está situada a 82,00 m do atirador. Sabendo que o atirador vê o alvo sob um ângulo de 12° em relação a horizontal, calcule a que distância do chão está o alvo.

5. Um avião levanta vôo em B e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com a horizontal. A que altura estará e qual distância percorrida quando alcançar a vertical que passa por uma igreja situada a 2,00 km do ponto de partida.

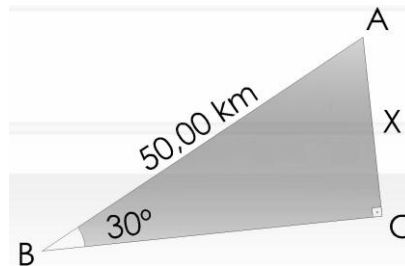


6. Um avião levanta vôo sob um ângulo constante de 19° . Após percorrer 2000 m em linha reta, a altura atingida pelo avião será de aproximadamente:



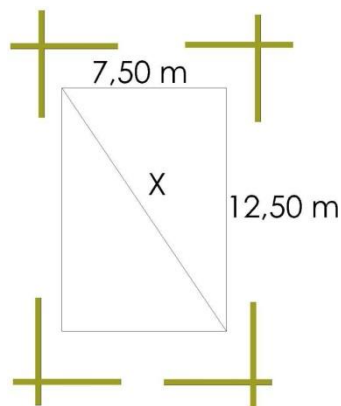


7. Na situação abaixo, deseja-se construir uma estrada que ligue a cidade A à estrada BC. Essa estrada medirá quanto.



8. Um pedreiro gostaria de fazer a locação de uma edificação. Para isso ele traçou uma distância de 3,00 m, e outra de 6,00 m. Qual deverá ser a outra distância para que o mesmo consiga esquadrear a obra.

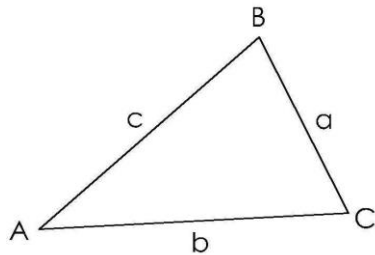
9. Um prédio esta sendo locado na Av. Mauro Ramos. O mestre de obras determinou com a trena as distâncias de 7,50 m e 12,50 m. O mesmo está em dúvida quanto a próxima medida ser determinada para que a obra fique exatamente a 90° em todos os vértices. Qual deverá ser essa distância?





2.4. LEI DOS SENOS

“Num triângulo qualquer a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita”.

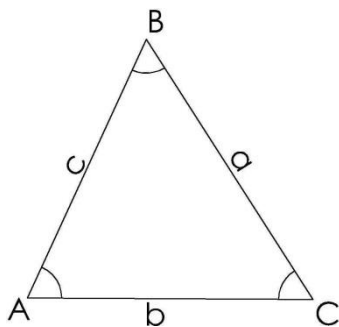


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2.5. LEI DOS COSSENOS

Este princípio é aplicado quando se conhece de um triângulo qualquer, dois lados e o ângulo por eles formado.

“Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas dos dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam”.



Fórmulas:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

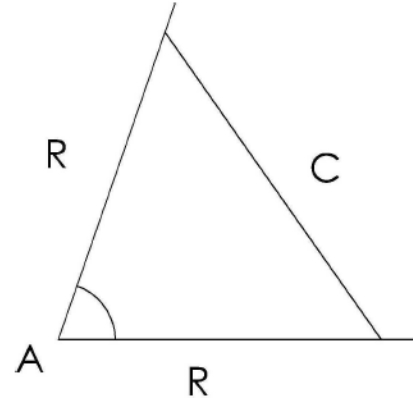
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$



2.6. CÁLCULOS DE ÂNGULOS:

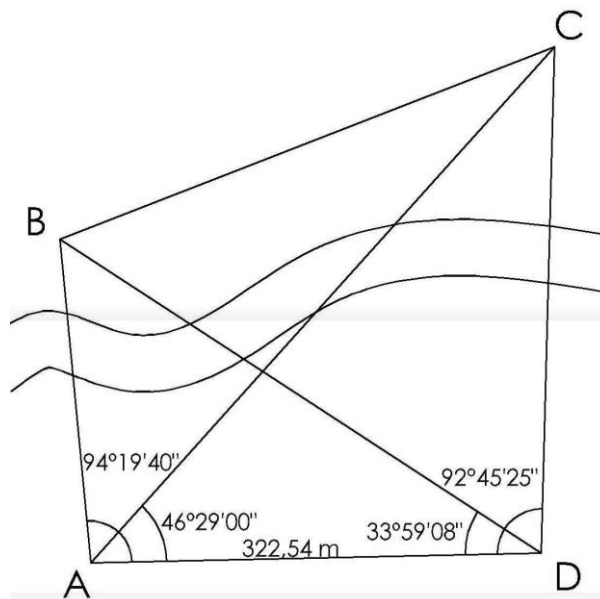
Para um triângulo com dois lados iguais:

$$\text{Fórmula: } \hat{A} = 2 \cdot \text{Arc Sen} \left(\frac{C}{2 \cdot R} \right)$$

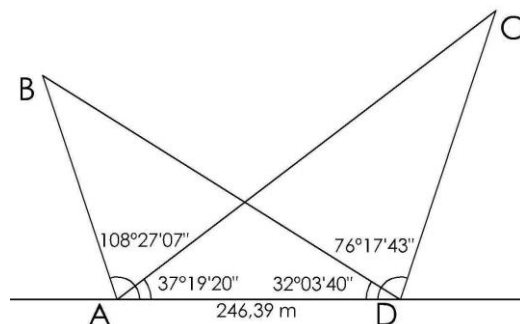


2.7. EXERCÍCIOS:

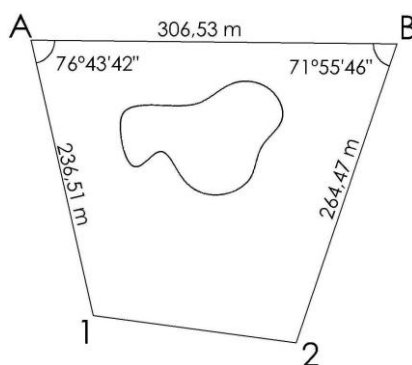
1. Determinar os lados de um terreno de vértices inacessíveis, segundo o croqui abaixo:



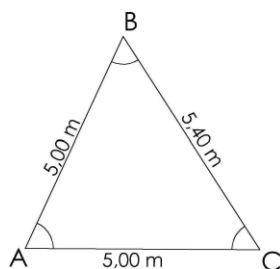
2. Calcular a distância: B-C



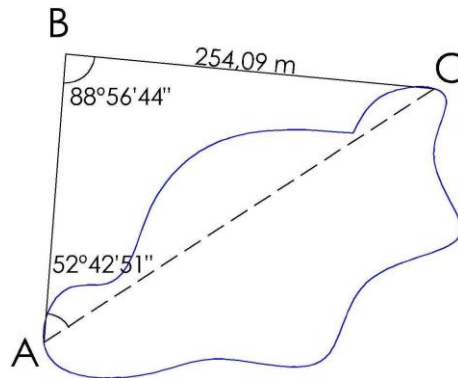
3. Calcular a distância: A-2 e B-1



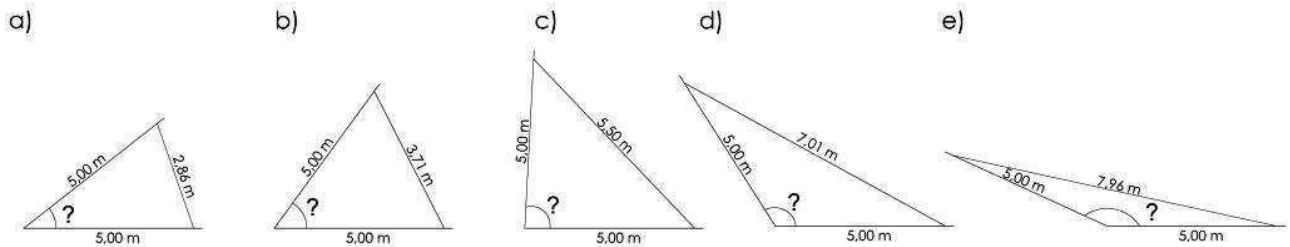
4. Dado o triângulo abaixo, calcular os valores dos ângulos:



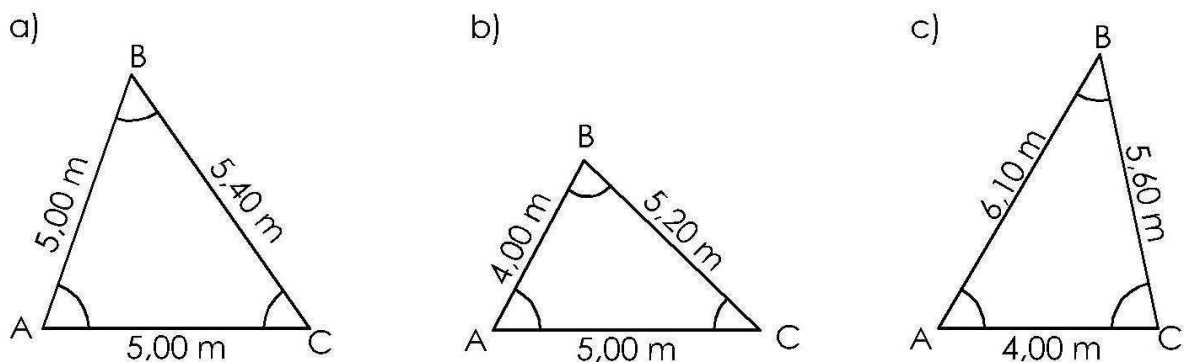
5. Determine a distância entre os extremos da lagoa (lado AC), conforme os dados da figura abaixo:



6. Dado um triângulo qualquer, calcular os ângulos:



7. Dado um triângulo qualquer, calcular todos os ângulos internos dos triângulos:

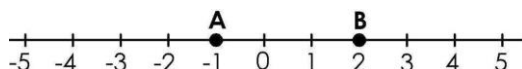


3. GEOMETRIA ANALÍTICA

3.1. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NA RETA

Todo o número real fica associado a um ponto na reta real. Este ponto fica determinado pelo número real chamado **coordenada** desse ponto.

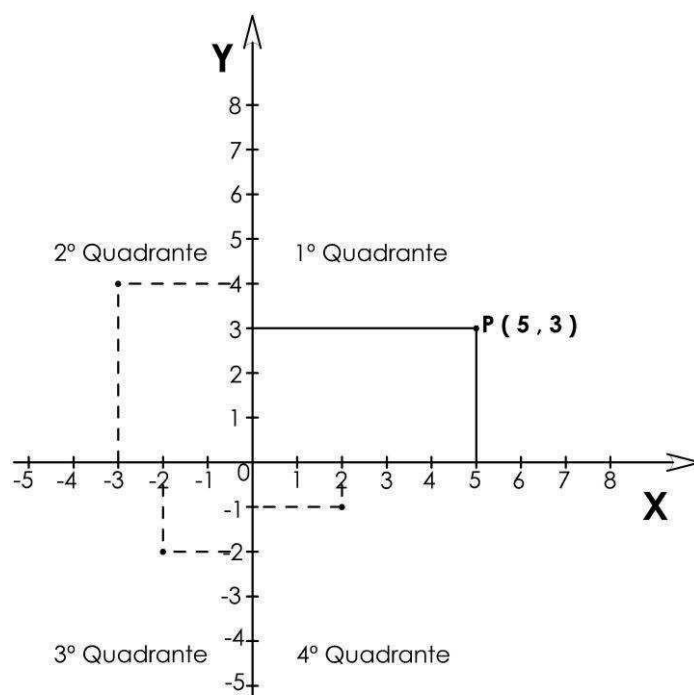
Observe que os pontos A e B da reta x a seguir, distam entre si 3 unidades.



De um modo geral, a distância entre os pontos A e B, de coordenadas a e b , respectivamente, é dada por: $d(A, B) = |x_B - x_A|$, ou seja, $d(A, B) = |b - a| = |2 - (-1)| = 3$

3.2. EIXOS COORDENADOS

Consideremos um plano e duas retas perpendiculares, sendo uma delas horizontal e a outra vertical. A horizontal será denominada Eixo das Abscissas (ou eixo OX) e a Vertical será denominada Eixo das Ordenadas (ou eixo OY). Os pares ordenados de pontos do plano são indicados na forma geral $P=(x,y)$ onde x será a abscissa do ponto P e y a ordenada do ponto P.



Quadrante	Sinal de X	Sinal de Y	Exemplo
1º	+	+	(5,3)
2º	-	+	(-3,4)
3º	-	-	(-2,-2)
4º	+	-	(2,-1)

Na verdade, x representa a distância entre as duas retas verticais indicadas no gráfico e y é a distância entre as duas retas horizontais indicadas no gráfico.

O sistema de Coordenadas Ortogonais também é conhecido por Sistema de Coordenadas Cartesianas. Este sistema possui quatro (4) regiões denominadas quadrantes.



3.2.1. EXERCÍCIO:

1 – Represente, no plano cartesiano ortogonal, os seguintes pontos e identifique em qual quadrante se encontram:

a) A (-1,4)

b) B (3,3)

c) C (2, -5)

d) M (-2,-2)

e) P (4,1)

f) Q (2,-3)

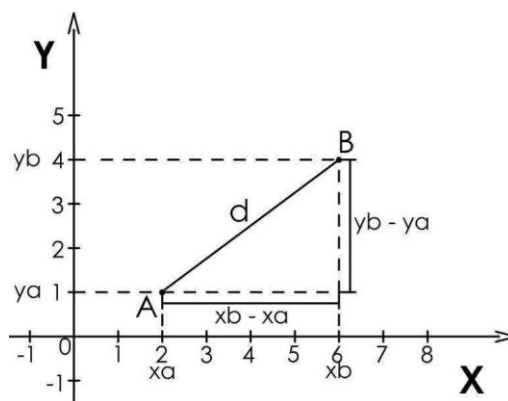
g) D (-2,0)

h) H (0,1)

i) K (5,0)

3.3. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO CARTESIANO

A distância entre os pontos A e B é a medida do segmento d. Como o triângulo destacado é retângulo e d é sua hipotenusa, aplicasse o teorema de Pitágoras.



$$d = \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2}$$

$$d = \sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 1)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 9}$$

$$d = 5$$

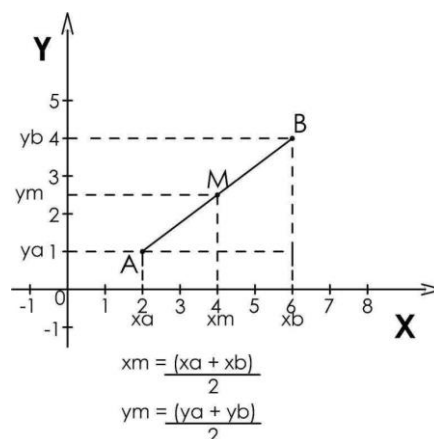


3.3.1. EXERCÍCIOS:

1. Calcule, em cada caso, a distância entre os dois pontos dados:
 - a) (1, 3) e (9, 9)
 - b) (-3, 1) e (5, -14)
 - c) (-4, -2) e (0, 7)
 - d) (54, 85) e (75, 21)
 - e) (125, 541) e (12, 792)
 - f) (-521, 854) e (-294, 653)
2. Calcule a distância do ponto M (-12, 9) à sua origem.
3. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sabendo que A (1, 3), B (7, 3) e C (7, 11).

3.4. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Dados os pontos $A=(x_a, y_a)$ e $B=(x_b, y_b)$, pode-se obter o Ponto Médio $M=(x_m, y_m)$ que está localizado entre A e B, através do uso da média aritmética por duas vezes, uma para as abscissas e outra para as ordenadas.



Observação: O centro de gravidade de um triângulo plano cujas coordenadas dos vértices são $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ e $C=(x_3, y_3)$, é dado por:

$$G = \left(\frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3}, \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3} \right)$$



3.5. ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO PLANO CARTESIANO

Conhecendo-se um ponto (x_1, y_1) localizado fora de uma reta que passa pelos pontos (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , pode-se calcular a área do triângulo formado por estes três pontos, bastando para isto determinar a medida da base do triângulo que é a distância entre (x_2, y_2) e (x_3, y_3) e a altura do triângulo que é a distância de (x_1, y_1) à reta que contem os outros dois pontos.

Como o processo é bastante complicado, apresentamos um procedimento equivalente simples e fácil de memorizar.

A área do triângulo é dada pela expressão que segue:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} * \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_n & Y_n \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área} = \left| \frac{(X_1 * Y_2 + X_2 * Y_3 + \dots + X_n * Y_1) - (Y_1 * X_2 + Y_2 * X_3 + \dots + Y_n * X_1)}{2} \right|$$

3.5.1. EXEMPLO

A área do triângulo cujos vértices são $(1, 2)$, $(3, 4)$ e $(9, 2)$ é igual a 8, pois:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 9 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área} = \left| \frac{(1*4 + 3*2 + 9*2) - (2*3 + 4*9 + 2*1)}{2} \right|$$

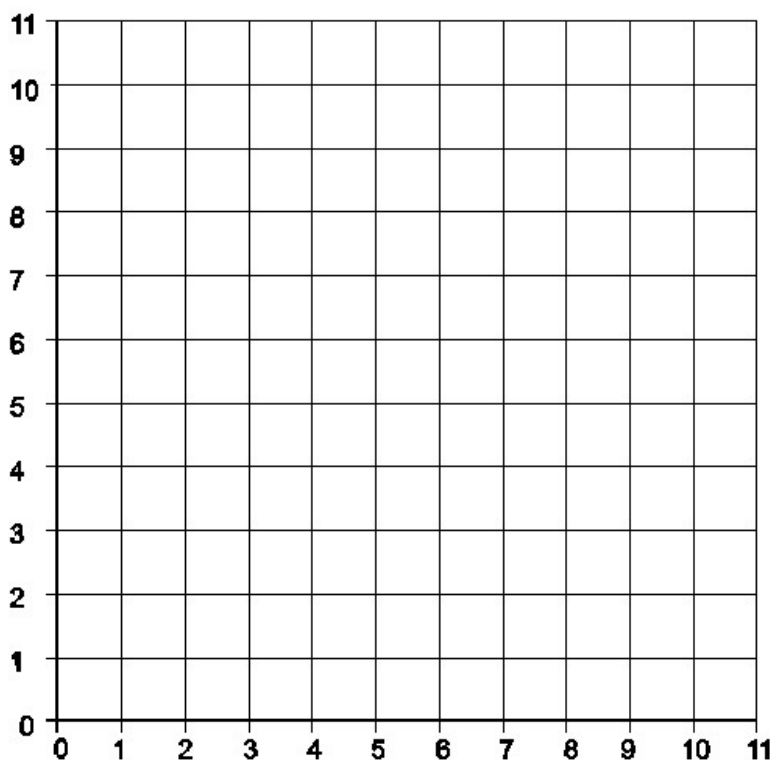
$$\text{Área} = \left| \frac{(28) - (44)}{2} \right|$$

$$\text{Área} = \left| \frac{-16}{2} \right| = 8 \text{ un}^2$$

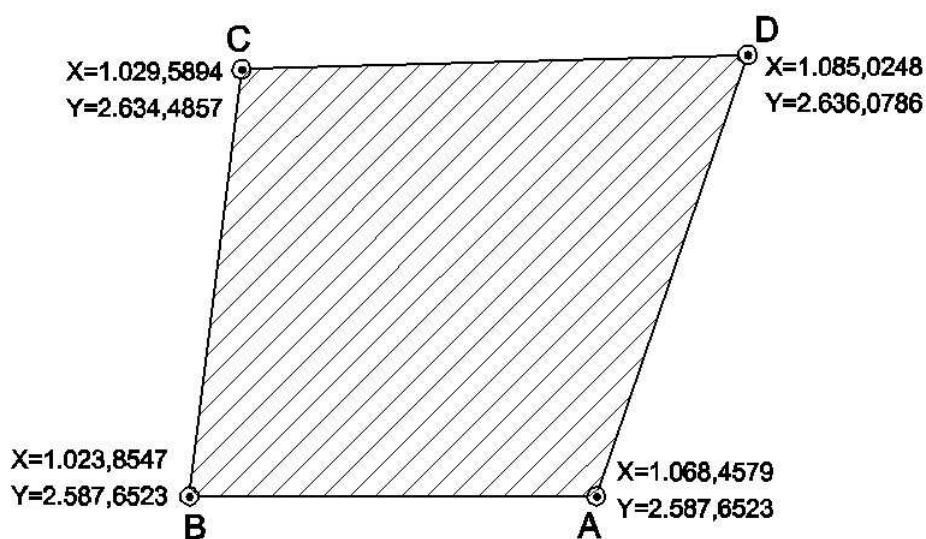


3.5.2. EXERCÍCIOS:

1. Desenhe o triângulo ABC no plano abaixo, sabendo que A (1, 3), B (7, 4) e C (6, 11), e calcule a sua área.



2. Com base nas coordenadas cartesianas dos vértices de um terreno conforme croqui abaixo, calcule a sua área.



3. Com base na coordenadas x,y listadas a seguir, localize no plano os vértices da poligonal, calcule a distância entre eles, as coordenadas dos pontos médios de cada segmento e a área da poligonal.

V=vértice (coordenada x, coordenada y)

V-1 (15,25)

V-4 (90,80)

V-7 (80, 90)

V-2 (105,15)

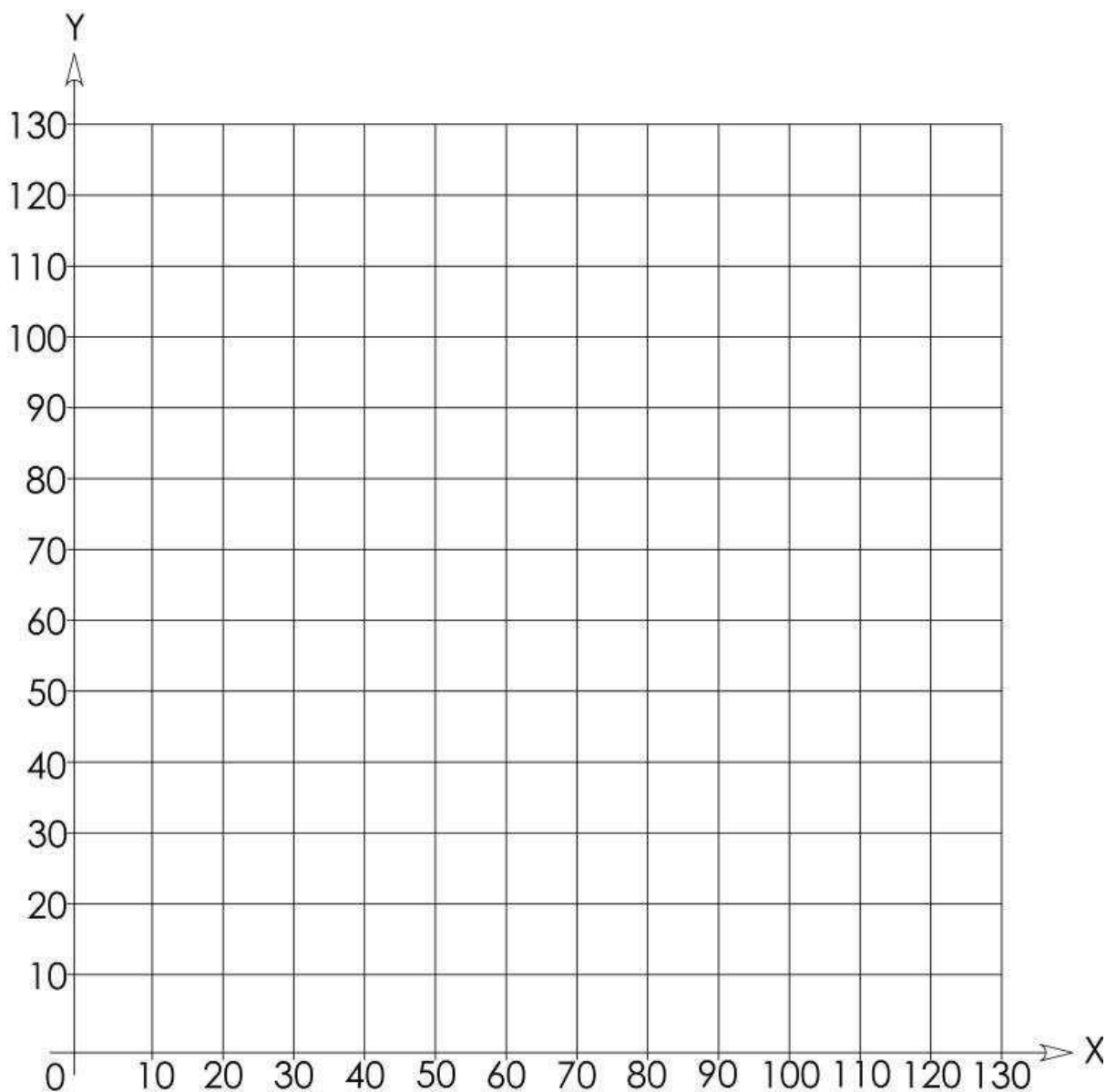
V-5 (100, 100)

V-8 (40, 95)

V-3 (120, 60)

V-6 (75, 110)

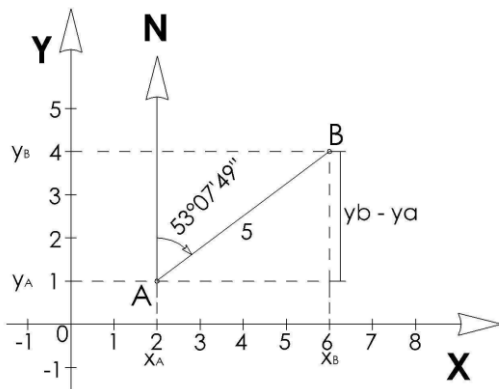
V-9 (15, 25)





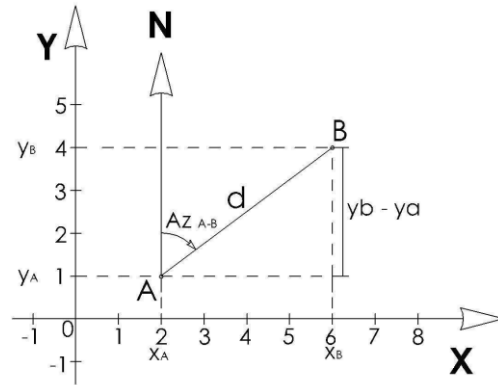
3.6. CÁLCULO DE COORDENADAS:

3.6.1. RETANGULARES POLARES



$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \sin Az_{A-B} \cdot d \\x_B &= 2 + \sin 53^\circ 07' 49'' \cdot 5 \\x_B &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_B &= y_A + \cos Az_{A-B} \cdot d \\y_B &= 1 + \cos 53^\circ 07' 49'' \cdot 5 \\y_B &= 4\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} & Az'_{A-B} &= \text{Arc Tg} \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \right) \\d &= \sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 1)^2} & Az'_{A-B} &= \text{Arc Tg} \left(\frac{6 - 2}{4 - 1} \right) \\d &= \sqrt{16 + 9} & Az'_{A-B} &= \text{Arc Tg} \left(\frac{4}{3} \right) \\d &= 5 & Az'_{A-B} &= 53^\circ 07' 49''\end{aligned}$$

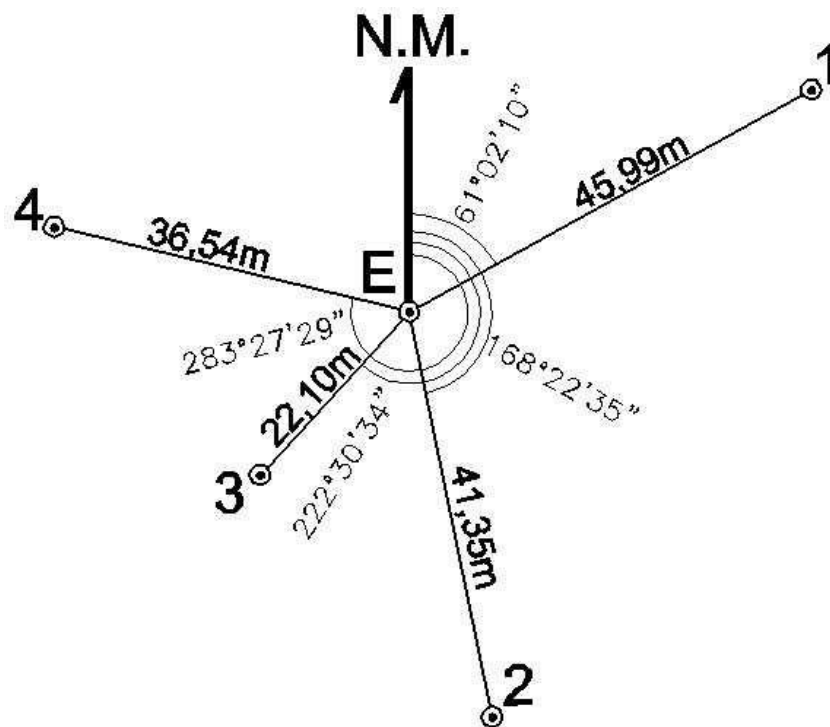
OBS:

Se $(x_B - x_A) > 0$ e $(y_B - y_A) > 0$ então $Az = Az'$
Se $(x_B - x_A) > 0$ e $(y_B - y_A) < 0$ então $Az = 180 - Az'$
Se $(x_B - x_A) < 0$ e $(y_B - y_A) < 0$ então $Az = Az' + 180$
Se $(x_B - x_A) < 0$ e $(y_B - y_A) > 0$ então $Az = 360 - Az'$



3.6.2. EXERCÍCIO:

1. Com base nos ângulos de azimute e distâncias do croqui abaixo, calcule as coordenadas dos pontos 1, 2, 3 e 4, sendo $X_E=500,0000$ e $Y_E=1.000,0000$



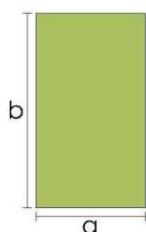
4. GEOMETRIA PLANA

4.1. ÁREAS DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS:

Medida de uma superfície ou área:

Quando medimos superfícies tais como um terreno, ou o piso de uma sala, ou ainda uma parede, obtemos um número, que é a sua área.

4.2. ÁREA DA REGIÃO RETANGULAR:



$$\text{Área} = a * b$$

$$\text{Perímetro} = 2 * a + 2 * b$$

4.2.1. EXERCÍCIOS:

1. Qual é a área de uma região retangular cujas medidas são 24,00 m por 12,50 m?

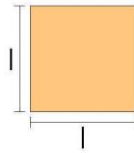
2. Um terreno retangular tem 8,40 m por 15,00 m e está sendo gramado. Sabendo que um quilo de semente de grama é suficiente para gramar 3,00 m² de terreno, quantos quilos de semente de grama são necessários para gramar o terreno todo?

3. Uma lajota retangular tem 30 cm por 20 cm. Qual é a área da lajota? Quantas lajotas são necessárias para cobrir o piso de uma garagem de 96,00 m² de área?

4. Quantos m² de azulejo são necessários para revestir até o teto uma parede retangular de 4,00 m por 2,75 m?



4.3. ÁREA DA REGIÃO QUADRADA:



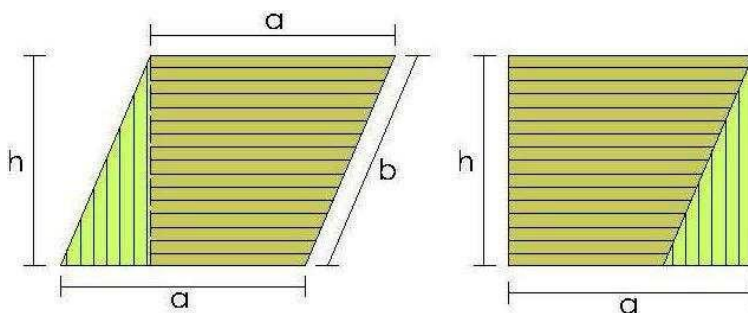
$$\text{Área} = l * l = l^2$$

$$\text{Perímetro} = 4 * l$$

4.3.1. EXERCÍCIOS:

5. Um terreno tem forma quadrada, de lado 30,20 m. Calcule a área desse terreno.
6. Um ladrilho de forma quadrada tem 20 cm de lado. Qual é a área desse ladrilho?
7. Para ladrilhar totalmente uma parede de 27,00 m² de área foram usadas peças quadradas de 15 cm de lado. Quantas peças foram usadas?

4.4. ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM PARALELOGRAMO:



$$\text{Área} = a * h$$

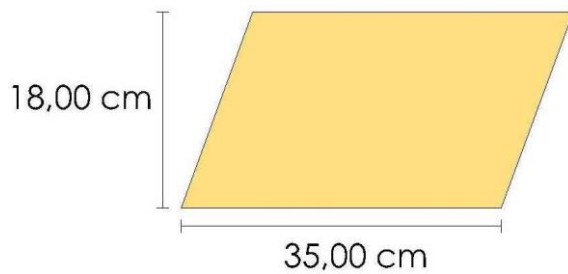
$$\text{Perímetro} = 2 * a + 2 * b$$



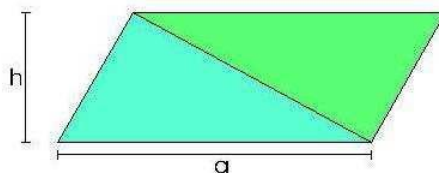
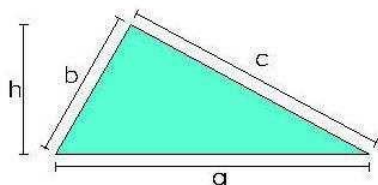
4.4.1. EXERCÍCIOS

8. A região de uma cartolina é limitada por um paralelogramo que tem 15,4 cm de comprimento por 8,5 cm de largura. Qual é a área dessa região?

9. Um pedaço de compensado, cuja espessura é desprezível, tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Determine a área desse pedaço de compensado.



4.5. ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR:



$$\text{Área} = \{a * h\} / 2$$

$$\text{Perímetro} = a + b + c$$

A área de um triângulo também pode ser calculada com a Fórmula de Heron:

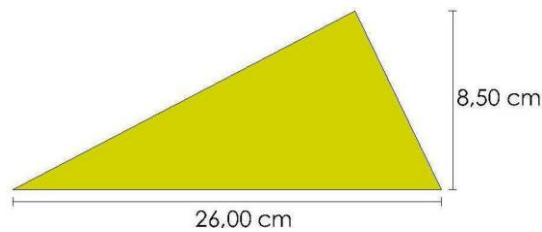
$$S = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{Área} = \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)}$$

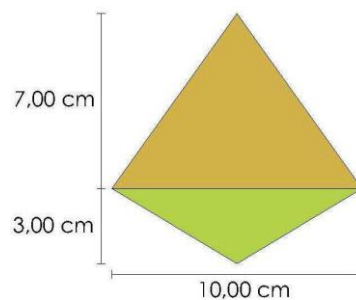


4.5.1. EXERCÍCIOS:

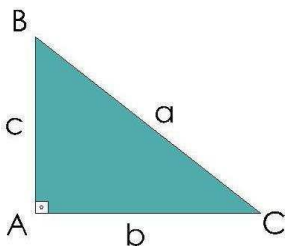
10. Um pedaço de madeira, cuja espessura é desprezível, tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Calcule a área desse pedaço de madeira.



11. Um pedaço de cartolina tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Qual é a área desse pedaço de cartolina?



4.6. ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADA POR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO:



$$\text{Área} = (c * b) / 2$$

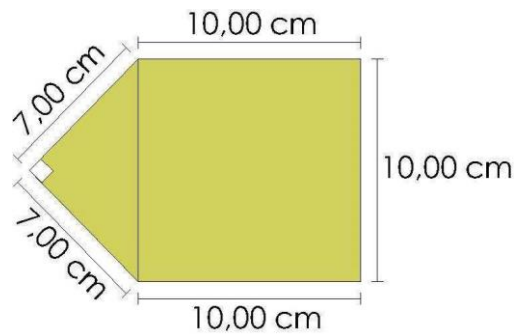
$$\text{Perímetro} = a + b + c$$



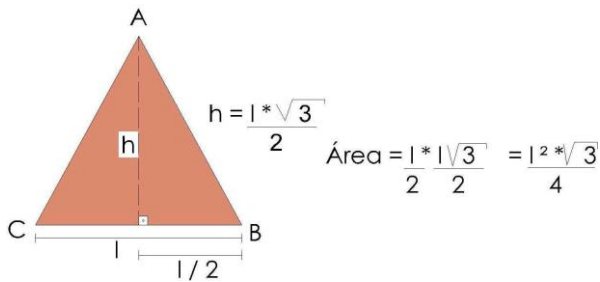
4.6.1. EXERCÍCIOS:

12. Qual é a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm?

13. Cortando-se um pedaço de madeira, obteve-se a figura abaixo, com suas dimensões aproximadas. Calcule a área desse pedaço de madeira.



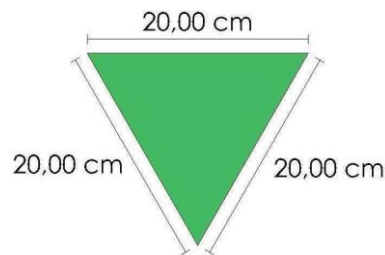
4.7. ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADA POR UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO:





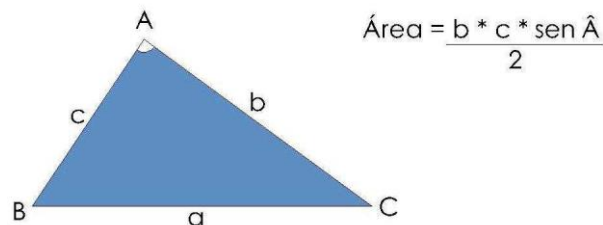
4.7.1. EXERCÍCIO:

14. Para uma festa junina, foram recortadas 100 bandeirinhas com o formato de um triângulo equilátero de lado 20 cm. Quantos m² de papel foram necessários para obter essas bandeirinhas?



4.8. ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR

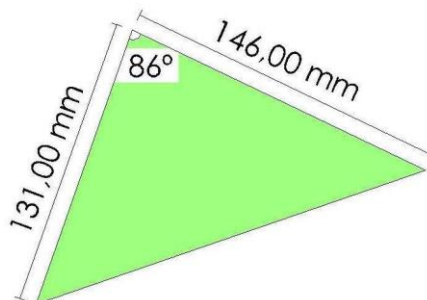
Conhecendo-se as medidas de **dois lados** e a medida do **ângulo** formado por esses lados:



$$\text{Área} = \frac{b * c * \text{sen } \hat{A}}{2}$$

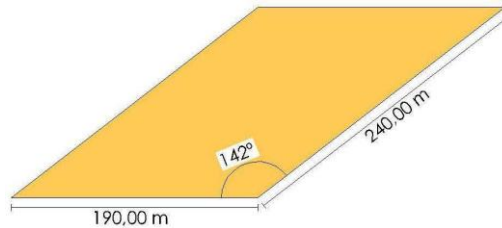
4.8.1. EXERCÍCIO:

15. Uma placa de ferro tem a forma da figura abaixo. Suas medidas estão indicadas na figura. Calcule a área dessa placa de ferro.

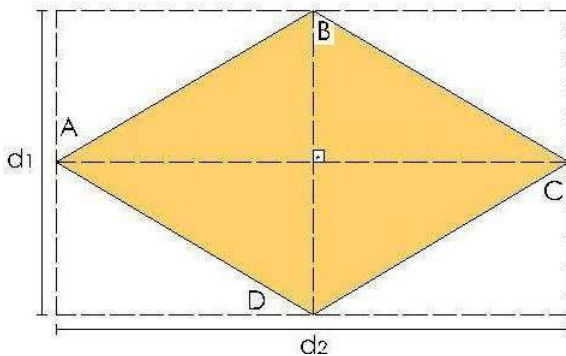




16. Um terreno tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Calcule a área desse terreno.



4.9. ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM LOSANGO:

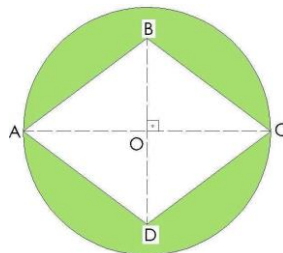


$$\text{Área} = (d_1 * d_2) / 2$$

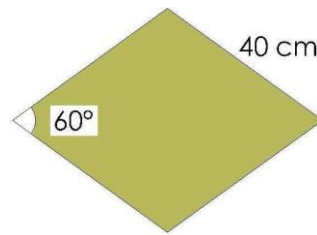
OBS: d_1 é a diagonal menor do losango
 d_2 é a diagonal maior do losango

4.9.1. EXERCÍCIO:

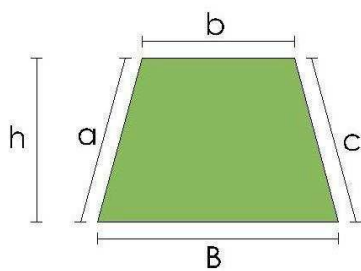
17. A figura seguinte nos mostra uma circunferência de centro O e de raio 4 cm e um losango A,B,C,D, cujo lado mede 5 cm. Calcule a área desse losango.



18. Determine a área do losango representado pela figura.



4.10. ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM TRAPÉZIO:



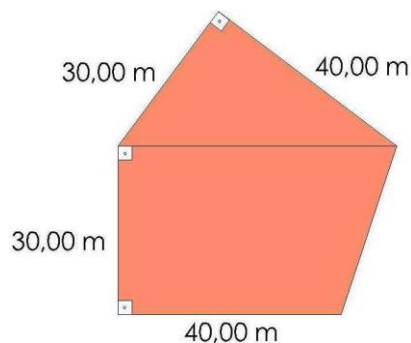
$$\text{Área} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$\text{Perímetro} = a + b + c + B$$

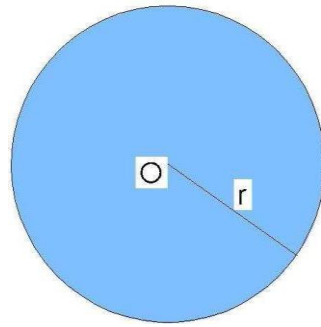
4.10.1. EXERCÍCIOS:

19. O quadrilátero A,B,C,D é um trapézio cujas bases medem 30 cm e 21 cm. Sabendo que a altura desse trapézio é 16 cm, determine a área do trapézio.

20. Feito o levantamento das medidas de um terreno pentagonal, foram determinados os lados indicados na figura.



4.11. ÁREA DO CÍRCULO:



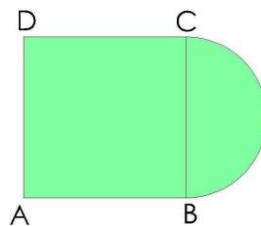
$$\text{Área} = \pi * r^2$$

$$\text{Perímetro} = 2 * R * \pi$$

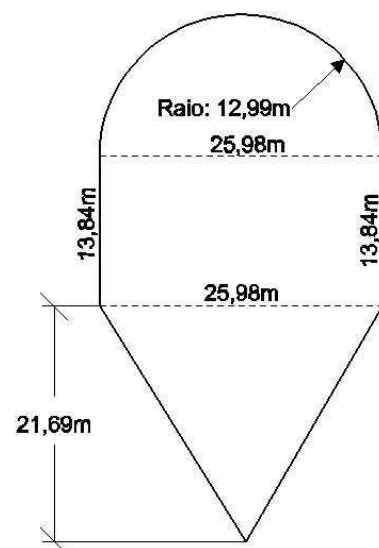
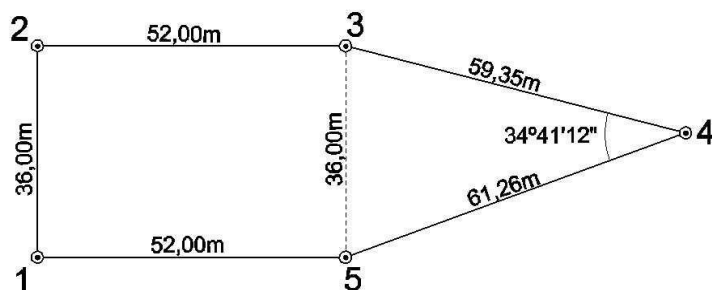
4.11.1. EXERCÍCIOS :

21. Num campo de futebol, o grande círculo tem 10 m de raio. Qual é a área do grande círculo?

22. Qual é a área da região sombreada, sabendo-se que A,B,C,D é um quadrado de 16 cm de perímetro?



23. Calcule as áreas das seguintes figuras geométricas





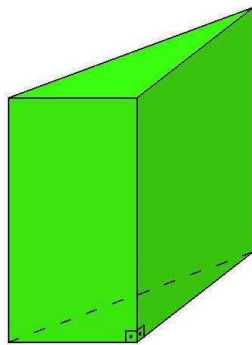
5. GEOMETRIA ESPACIAL

A Geometria espacial funciona como uma ampliação da Geometria plana e trata dos métodos apropriados para o estudo de objetos espaciais assim como a relação entre esses elementos.

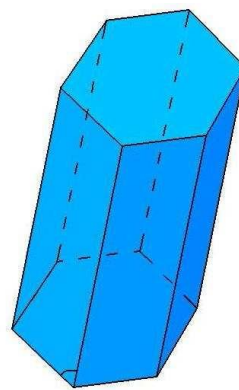
Assim, estudaremos especificamente os cálculos inerentes para a obtenção dos volumes destes objetos.

5.1. PRISMAS

Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.



Prismas retos: as arestas laterais são perpendiculares aos planos de bases



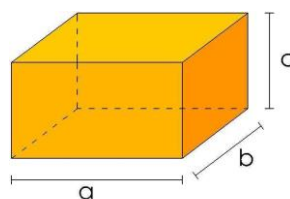
Prismas oblíquos: as arestas laterais são oblíquas aos planos de bases

O Volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base pela altura.

$$\text{Volume}_{\text{prisma}} = \text{Área}_{\text{base}} \times h$$

Dentre os objetos reais que podemos representar por prismas, é bastante comum aparecerem aqueles que possuem todas as faces sendo paralelogramos. Esses prismas recebem o nome especial de paralelepípedo.

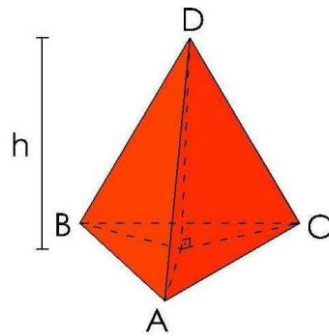
O volume do paralelepípedo é dado por:



$$\text{Volume} = a * b * c$$

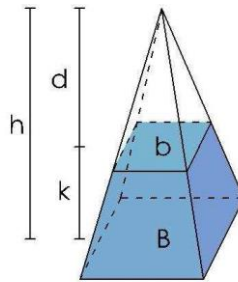


5.2. PIRÂMIDES



$$\text{Volume} = \frac{\text{Área}_{(\text{base})} * h}{3}$$

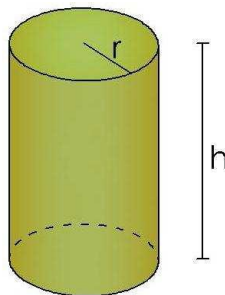
5.3. TRONCO DE PIRÂMIDE



$$\text{Volume} = \frac{k * (B + \sqrt{B * b} + b)}{3}$$

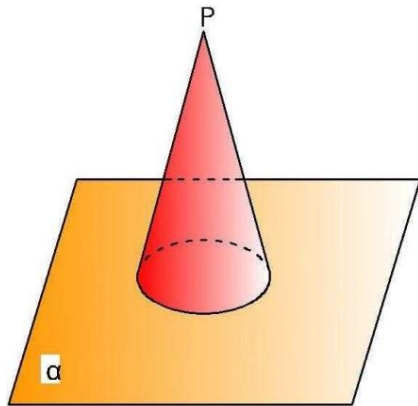
5.4. CILINDROS

O volume do cilindro é igual à área de sua base pela sua altura, ou seja:



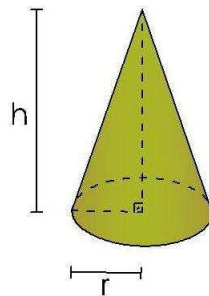
$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{Área}_{(\text{base})} * h \\ &= \pi * r^2 * h\end{aligned}$$

5.5. CONE



Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

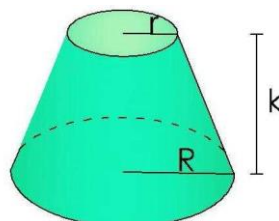
O Volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura, ou seja:



$$\text{Volume} = \frac{\text{Área}_{\text{base}} * h}{3}$$

$$= \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

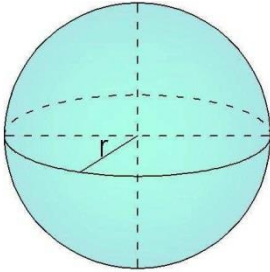
5.6. TRONCO DE CONE



$$\text{Volume} = \frac{k * \pi * (R^2 + R * r + r^2)}{3}$$



5.7. ESFERA

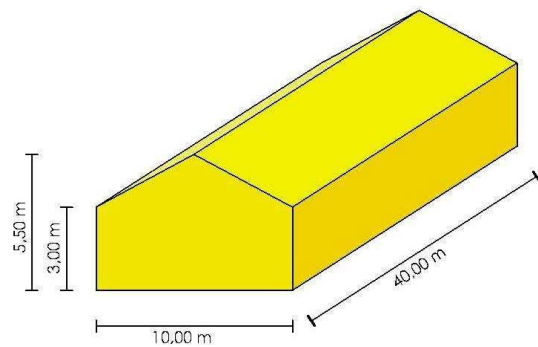
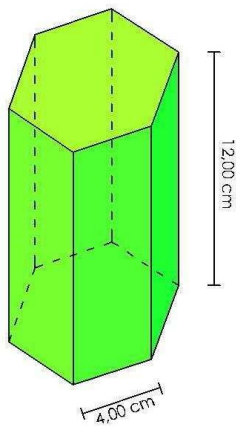
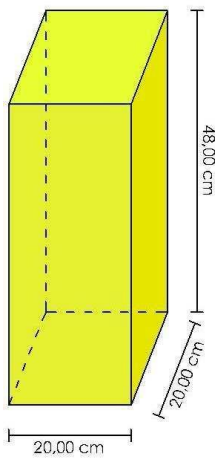


A esfera no espaço é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância, denominada raio de um ponto fixo chamado centro.

$$\text{Volume} = \frac{4 * r^3 * \pi}{3}$$

5.8. EXERCÍCIOS:

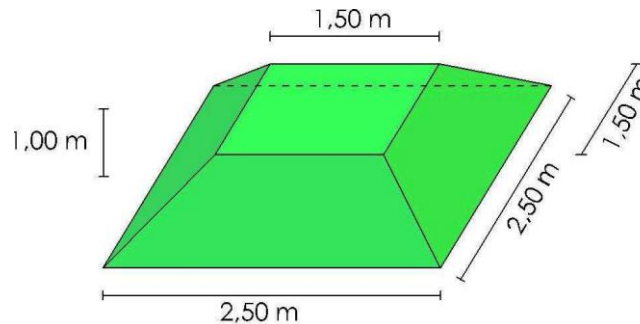
1. Calcule o volume dos seguintes sólidos:



2. Um filtro cônico de papel tem 12 cm de profundidade e 8 cm de diâmetro. Determine sua capacidade em mililitros (1 ml = 1cm³).



3. Um Engenheiro está projetando uma sapata (parte de um alicerce) de concreto em forma de tronco de pirâmide regular, com as dimensões indicadas na figura abaixo. Sabendo-se que em 1 m^3 de concreto gasta-se aproximadamente 9 sacos de cimento, determine quantos sacos serão gastos para fazer essa sapata.



4. A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 3 cm. Sabendo-se que a pirâmide tem altura de 10 cm, calcular o volume dessa pirâmide.

5. Certa bebida é vendida em dois recipientes cilíndricos:

(1) Lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura de 11,6 cm;

(2) Lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura de 16,6 cm.

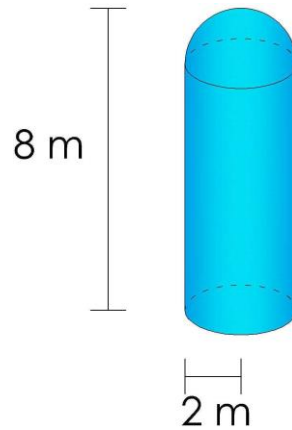
Os preços de dessa bebida são R\$ 0,70 e R\$ 1,10, respectivamente, para as latas (1) e (2).

Calcule o volume de cada recipiente;

Qual das duas embalagens apresenta melhor preço para o consumidor?



6. Um silo tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semi-esfera, como na figura. Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2,00 m e que a altura do silo mede 8,00 m.



7. Calcule o volume de um depósito de gás esférico com raio de 13,50 m.

8. Para viabilizar um projeto de irrigação, é necessário construir um canal de seção trapezoidal conforme figura abaixo e com 325,00 metros de comprimento. Considerando o terreno plano, qual o volume de escavação necessário para a construção deste canal?

