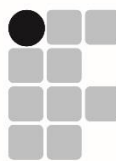


**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA**
Departamento Acadêmico da Construção Civil
Curso Técnico em Agrimensura

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES E REDES

**SÉRIE: TOPOGRAFIA E AGRIMENSURA PARA
CURSOS TÉCNICOS**

**Prof. Ivandro Klein
Prof. Matheus Pereira Guzatto**



**INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA**

**Florianópolis-SC
2018**

Curso Técnico em Agrimensura:

Av. Mauro Ramos, 950, Centro, Florianópolis - Santa Catarina

CEP: 88020-300

Telefone: (48) 3321-6061

<http://agrimensura.florianopolis.ifsc.edu.br>

Reitoria:

Rua 14 de Julho, 150, Coqueiros, Florianópolis - Santa Catarina

CEP: 88075-010

Telefone: (48) 3877-9000 / Fax: (48) 3877-9060

www.ifsc.edu.br

Reprodução total ou parcial dessa obra autorizada pelos autores e pela
instituição para fins educativos e não comerciais.

Catálogo na fonte pelo Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de Santa Catarina - IFSC
Reitoria

K641a

Klein, Ivandro

Ajustamento de observações e redes: topografia e agrimensura para
cursos técnicos [recurso eletrônico] / Ivandro Klein, Matheus Pereira Guzzatto
– Florianópolis: IFSC, 2018.

1 Livro digital.

74 p.: il.

Inclui referências.

ISBN 97885XXXXXXX

1. Ajustamento de observações. 2. Redes de referência. I. Guzzatto,
Matheus Pereira. II. Título.

CDD 526.98

SUMÁRIO

1. OBSERVAÇÕES (MEDIDAS) E TIPOS DE ERROS.....	4
1.1 Erros sistemáticos	6
1.2 Erros grosseiros.....	8
1.3 Erros aleatórios	9
1.4 Erro absoluto e erro relativo	11
1.5 Precisão e acurácia de um conjunto de medidas.....	12
2. CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.....	17
2.1 Principais estatísticas (estimadores amostrais)	18
2.2 Distribuição normal de probabilidade	20
2.3 Aceitação e rejeição de medições.....	22
2.4 Precisão nominal, leitura mínima, calibração e ajuste	24
2.5 Covariância e coeficiente de correlação das observações	25
2.6 Erro quadrático médio (EQM)	27
3. PROPAGAÇÃO DE ERROS.....	29
3.1 Algumas relações matemáticas e derivadas parciais em propagação de erros.....	30
3.2 Propagação de erros em Topografia e Geodésia	31
3.3 Propagação simplificada de erros em redes	47
3.4 Exemplos de propagação de erros em levantamentos.....	48
4. AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES POR MÍNIMOS QUADRADOS.....	54
4.1 O método dos mínimos quadrados (MMQ) em sistemas lineares	57
4.2 Comentários gerais sobre o ajustamento pelo MMQ.....	63
4.3 Exemplo numérico de ajustamento pelo MMQ.....	65

1. OBSERVAÇÕES (MEDIDAS) E TIPOS DE ERROS

Quando se realiza uma observação, como por exemplo, a medida da direção angular de um alinhamento, ou a distância entre dois pontos, inevitavelmente, esta medição possuirá um erro (ou incerteza) associado ao valor numérico mensurado. Isto se deve ao fato que as observações conduzidas pelo homem se caracterizam pela inevitável presença dos “erros de medida”. Estes erros resultam não apenas de falhas humanas, mas também da imperfeição (limitação) dos equipamentos e métodos utilizados e ainda da influência de fatores externos como as condições ambientais nas quais se realiza uma dada observação (mensuração).

Por exemplo, se um observador medir o tempo que um objeto demora para cair de uma determinada altura, sujeito apenas a ação (força) da gravidade, e repetir este experimento diversas vezes, sempre sob as mesmas condições, inevitavelmente, irá observar valores diferentes para o tempo de queda deste objeto cada vez que o experimento for repetido. Alguns dos fatores que podem influenciar nesta medida são os tempos de reação do observador para iniciar e encerrar a marcação do tempo, a limitação ou imperfeição do instrumento de medida utilizado (relógio, cronometro e etc.), o posicionamento adequado do objeto na altura de queda, e ainda, possíveis interferências do ambiente no experimento, como a ação do vento e o atrito atmosférico.

É importante ressaltar que, devido a esta inevitável existência de erros nas observações, é impossível determinar o “valor verdadeiro” de qualquer grandeza que seja mensurada, isto é, observada ou medida. Até mesmo as grandezas fundamentais da Física, determinadas com os equipamentos e métodos mais avançados e precisos de medição atualmente disponíveis, possuem uma incerteza associada aos seus valores numéricos. Veja alguns exemplos:

- Constante gravitacional universal: $G = (6,67408 \pm 0,00031) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
- Constante de Planck: $h = (6,626070040 \pm 8,1 \times 10^{-8}) \times 10^{-34} J \cdot s$
- Massa do elétron: $m_e = (9,10938356 \pm 1,1 \times 10^{-7}) \times 10^{-31} kg$

Frente a estas considerações, os objetivos da Teoria dos Erros são:

- Obter o “melhor valor possível” para uma grandeza, a partir dos dados experimentais (observações) disponíveis, ou seja, a melhor aproximação possível para o valor verdadeiro desta grandeza, em termos probabilísticos;
- Obter a incerteza do melhor valor obtido, o que significa determinar o quanto este “melhor valor possível” pode ser diferente do respectivo “valor verdadeiro” da grandeza, em termos probabilísticos.

Matematicamente, a relação entre estes termos é dada por:

$$\epsilon = y - x,$$

onde “ y ” é o valor observado (medido) de uma certa grandeza, “ x ” é o valor verdadeiro desta grandeza, e “ ϵ ” corresponde ao erro da observação (medida). Note que, como o valor verdadeiro de uma grandeza é desconhecido, o “verdadeiro” valor do erro de uma medida também é desconhecido, caso contrário, seria possível obter x a partir da expressão acima, por meio dos valores conhecidos de y e ϵ .

Desta forma, usualmente, considera-se um valor de referência estimado, como por exemplo, a média aritmética ($\bar{x}$) de uma série de observações da grandeza de interesse. Neste caso, o erro aparente (e) de uma dada observação será a diferença entre o valor observado (y) e o respectivo valor de referência ($\bar{x}$), ou seja:

$$e = y - \bar{x}$$

Outra grandeza derivada destas relações é o resíduo (v), que corresponde ao erro aparente da observação com o sinal inverso, isto é $v = -e = \bar{x} - y$, pois, caso o erro seja positivo, o resíduo (correção) ao valor observado deve ser negativo, e vice-versa.

Por exemplo, caso o valor observado de uma grandeza seja $y = 10,02 \text{ m}$, e o valor de referência desta grandeza seja $\bar{x} = 10 \text{ m}$, o erro aparente da observação corresponde a $e = 10,02 - 10 = 0,02 \text{ m}$, o que resulta em um resíduo (correção) ao valor observado de $v = -0,02 \text{ m}$. Em outras palavras, subtraindo 2 cm ($0,02 \text{ m}$) do valor observado ($y = 10,02 \text{ m}$), obtêm-se o valor de referência da grandeza mensurada: $\bar{x} = 10,02 - 0,02 = 10 \text{ m}$.

Eventualmente, é possível obter o erro verdadeiro (ϵ), como por exemplo, no caso do erro de fechamento do somatório dos ângulos internos de um triângulo, pois sabe-se que a soma dos três ângulos internos de um triângulo deve resultar em 180° . Embora seja possível determinar o erro de fechamento verdadeiro, para cada um dos três ângulos medidos, como os respectivos valores verdadeiros são desconhecidos, pode-se determinar apenas os erros aparentes. Em outras palavras, o somatório de três erros aparentes conduz ao erro de fechamento verdadeiro deste problema.

Além disso, na calibração de instrumentos, assume-se que os valores “verdadeiros” de certas grandezas de referência são conhecidos. Por exemplo, na calibração de uma estação total, para a determinação da precisão nominal linear, conforme irá constar no manual do equipamento ($0,8\text{ mm} + 1\text{ ppm}$; $2\text{ mm} + 2\text{ ppm}$ e etc.), assume-se que a velocidade da luz (infravermelho ou laser) é constante e conhecida, bem como, as distâncias de referência que serão utilizadas em laboratório para determinar o valor da precisão nominal linear do instrumento em questão.

Os erros de observação, tanto verdadeiros quanto aparentes, são tradicionalmente classificados em três tipos: sistemáticos, grosseiros e aleatórios.

1.1 Erros sistemáticos

Erros sistemáticos são erros que apresentam tendência, isto é, afetam os valores observados de tal maneira que estes são maiores ou menores do que o valor verdadeiro, e, portanto, possuem alguma causa, como por exemplo, alguma lei física conhecida, podendo ser evitados por meio de técnicas especiais de observação, ou devidamente parametrizados (estimados) por meio de um modelo matemático conhecido, ou seja, de fórmulas fornecidas por alguma teoria (Figura 1.1).

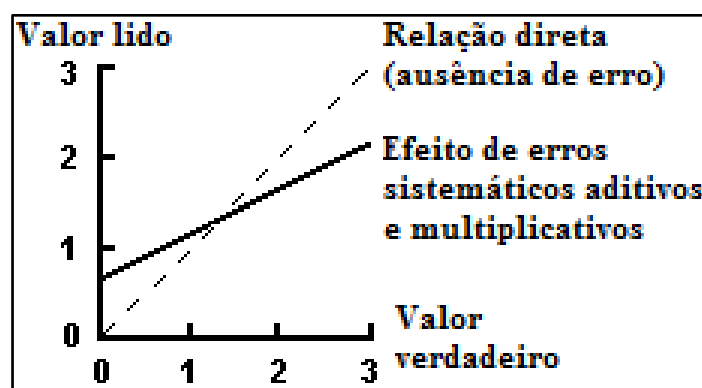


Figura 1.1 – Relação matemática entre os valores verdadeiros e os valores lidos (com erros sistemáticos).

Grande parte dos erros em geomensura são sistemáticos, como por exemplo, o efeito da curvatura terrestre nos levantamentos topográficos e geodésicos; o efeito da refração atmosférica na propagação de ondas eletromagnéticas (luz visível, laser, infravermelho, sinais GNSS e etc.); o erro devido a Ionosfera no posicionamento GNSS; a interferência das condições ambientais nas medidas de distância utilizando estação total (temperatura, pressão, umidade); bem como, o valor da constante do prisma refletor utilizado; o erro na orientação angular inicial de um levantamento; a catenária e os efeitos de dilatação térmica e tensão nas medidas de distância utilizando trena; possíveis defeitos do equipamento, como bússola ou estação total necessitando de aferição; além de uma possível tendência do próprio observador, que, por exemplo, realiza a leitura sempre um pouco acima ou um pouco abaixo da graduação da mira em um nivelamento geométrico, e etc.

Os erros sistemáticos podem ser minimizados ou eliminados no levantamento por meio de técnicas especiais de observação, como por exemplo: reiteração angular, visando eliminar um possível erro na graduação do limbo do aparelho; leituras angulares conjugadas (na posição direta e inversa da luneta), visando eliminar erros de verticalidade e horizontalidade dos eixos do instrumento; colocação do nível a igual distância das miras no nivelamento geométrico, visando eliminar os efeitos da curvatura terrestre e da refração atmosférica na obtenção dos desníveis; estaqueamento cruzado para eliminar um possível efeito cumulativo nas medidas de distância com trena; utilização de correções ou observações diferenciais, como por exemplo, DGNSS ou duplas diferenças no posicionamento relativo GNSS, e etc.

Além disso, os erros sistemáticos podem ser parametrizados (estimados matematicamente) e corrigidos ou reduzidos dos valores medidos, como por exemplo, com o uso de receptor GNSS de dupla ou tripla frequência, por meio da adoção da observável “*ion-free*”; pela aplicação de um modelo de refração atmosférica nas medidas eletrônicas de distância de uma estação total; ou com a redução das distâncias no transporte de coordenadas UTM, sendo que muitas destas correções podem ser realizadas automaticamente pelo *software* interno do equipamento utilizado.

É importante ressaltar que na parametrização (ou estimação) de erros sistemáticos, tem-se somente a adoção de um modelo teórico para representar a realidade. Por exemplo, no processo de cálculo para estabelecimento de uma rede de referência, pode-se considerar a superfície terrestre como sendo plana, esférica,

elipsoidal e assim por diante, o que resulta em aproximações teóricas da realidade cada vez mais exatas, mas não completamente perfeitas, isto é, isentas de erros.

1.2 Erros grosseiros

Erros grosseiros são falhas de natureza humana ou instrumental que não devem ocorrer, devendo ser evitados ou devidamente identificados (localizados) nas medidas contaminadas, para que a sua influência nos resultados finais, ou seja, após todo o processo de cálculo, seja removida ou minimizada.

A identificação de erros grosseiros pode ser fácil em certos casos, como erros muito grandes, por exemplo, ou muito difícil em outros, como enganos muito pequenos, ou quando mais de uma observação está contaminada por erro grosseiro. Muitas vezes, somente um rigoroso procedimento de controle de qualidade pode justificar ou não a rejeição de uma observação suspeita de estar contaminada por erro grosseiro, pois pode ser muito difícil determinar, com alta confiança, quais observações (medidas) estão isentas de falhas (erros grosseiros), e quais observações estão contaminadas por erros grosseiros, uma vez que a influência de erros grosseiros pode afetar os resíduos de várias observações (Figura 1.2). Quando houver qualquer suspeita de erro grosseiro em alguma observação, com certo nível de confiança, esta medida deve ser refeita, se possível, ou então eliminada do conjunto de dados.

Uma das maneiras de evitar a existência de erros grosseiros nas observações é o emprego de rotinas de controle em campo, como por exemplo, efetuar múltiplas leituras de uma mesma grandeza, descartando e observando novamente os valores que se afastarem muito do valor de referência adotado (média aritmética da série de leituras, por exemplo). Ressalta-se que esse procedimento não elimina possíveis erros sistemáticos que contaminam todas as observações.

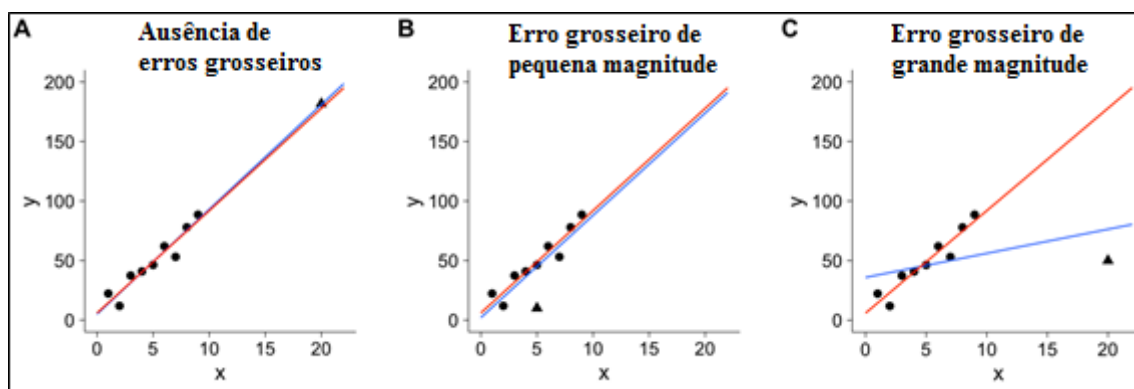


Figura 1.2 – Exemplos da influência de erro grosseiro em uma observação no ajuste de uma reta.

Como exemplos de erros grosseiros em geomensura, pode-se citar o erro de anotação em uma caderneta de campo, como por exemplo, inversão de dígitos (47,459 m ao invés de 47,495 m); o erro na medição da altura do instrumento (nível, estação total, teodolito, antena GNSS e etc.); o sinal de retorno de um laser scanner indevidamente refletido por determinado alvo indesejado, como um automóvel em deslocamento; o multicaminho acentuado ou distúrbios ionosféricos súbitos no posicionamento GNSS; eventuais falhas eletrônicas (panes instrumentais), utilização de pontos de apoio fisicamente deslocados de sua posição original, alteração da altura do prisma refletor sem o devido registro em um levantamento planialtimétrico, sinal refletido erroneamente no modo de medição sem prisma da estação total; erro no aumento da régua no nivelamento geométrico; erro de informação no croqui do levantamento, erro na edição/configuração de um ponto em levantamento automatizado, solução fixa errada no posicionamento GNSS; erro na determinação de pontos homólogos em fotografias aéreas, dentre outros.

A etapa de detecção e identificação (localização) de erros grosseiros é conhecida como controle de qualidade, e é um dos temas de pesquisa mais investigados nas áreas relacionadas com as ciências geodésicas, pois os mesmos podem afetar significativamente os resultados finais de um projeto, como por exemplo, os valores das coordenadas dos pontos de uma rede de referência; além da difícil identificação, com alta confiança, de quais observações contém erros grosseiros ou não após a coleta dos dados em campo. Para reflexão, considere a seguinte questão: na ocorrência de um ou mais erros grosseiros, como determinar quais observações contém erro grosseiro ou não no erro de fechamento (linear ou angular) de uma poligonal planimétrica?

1.3 Erros aleatórios

Erros aleatórios, ao contrário dos erros sistemáticos e grosseiros, são inevitáveis, sendo uma característica intrínseca da observação, resultando da incerteza associada à natureza experimental do processo de medidas, ou seja, da própria precisão da observação, diretamente relacionada ao instrumento e a técnica utilizada. Os erros aleatórios também são chamados de randômicos, por não possuírem tendência, podendo ser ora positivos ora negativos; de acidentais, por serem inevitáveis; e também de estatísticos, por apresentarem natureza probabilística.

Os erros aleatórios são os erros remanescentes após todas as falhas (erros grosseiros) e tendências (erros sistemáticos) terem sido removidas dos valores medidos

(observados), sendo resultados da incerteza (limitação) do próprio observador, da técnica de medida e/ou do equipamento utilizado e das próprias condições de observação.

Geralmente, os erros aleatórios são de pequena magnitude, e a probabilidade destes serem positivos ou negativos, ou seja, acima ou abaixo do valor verdadeiro, é a mesma, pois não possuem tendência ou causa conhecida, ao contrário dos erros sistemáticos (Figura 1.3). Desta forma, os erros aleatórios não seguem uma lei física (ou determinística), e, portanto, devem ser tratados de acordo com as leis matemáticas da probabilidade, ou, em outras palavras, apresentam resultados “imprevisíveis” ou de natureza randômica.

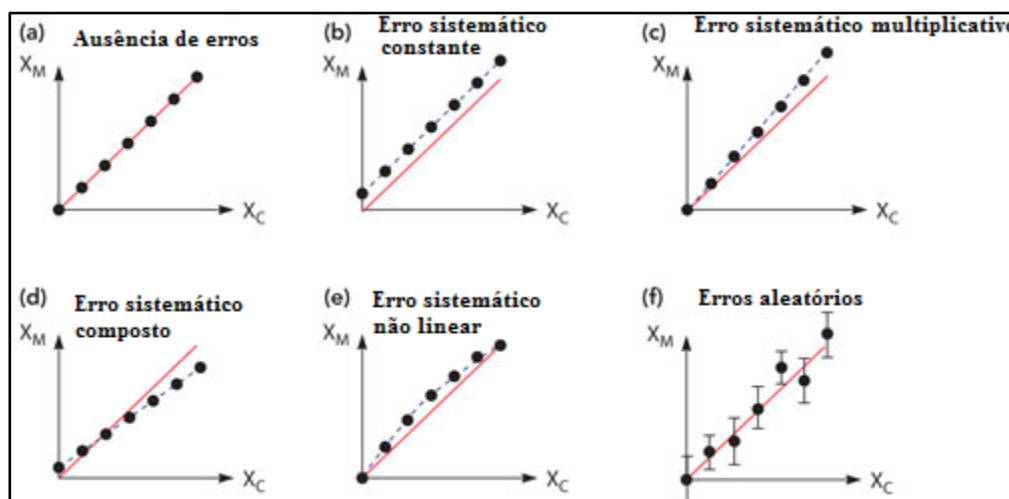


Figura 1.3 – Diferença entre erros sistemáticos e erros aleatórios.

Os erros sistemáticos, como a própria denominação sugere, tendem a se acumular, pois em geral são sempre positivos ou sempre negativos, enquanto os erros acidentais (aleatórios), por serem ora positivos e ora negativos, tendem a se neutralizar (compensar), conforme o número de observações aumenta. Ressalta-se que os erros sistemáticos se confundem com os erros aleatórios quando são de baixa magnitude em relação à precisão do instrumento ou método utilizado, ou de causas não conhecidas ou negligenciadas. Por exemplo, a negligência da carga da atmosfera, um erro sistemático cujo efeito é de no máximo alguns cm, no posicionamento GNSS utilizando *smartphones*, cuja precisão posicional resultante é da ordem de metros.

São exemplos de erros aleatórios a centragem imperfeita durante a instalação de um equipamento topográfico em um ponto; o pequeno desnível remanescente da bolha tubular durante a leitura de uma direção angular; a estimativa dos milímetros (ou dos

segundos de arco) durante a leitura ótica de uma distância (ou de um ângulo); o erro em *pixels* na identificação de um ponto de controle em uma imagem; o erro de colimação em visadas por meio de níveis e estações totais; a precisão centimétrica no posicionamento RTK com solução fixa das ambiguidades; a própria precisão nominal do instrumento, fornecida pelo fabricante e etc.

Um exemplo de estudo experimental dos erros acidentais é o clássico trabalho de Bradley no início do século XVII, que tinha por objetivo obter a posição do ponto vernal, por meio de 462 determinações da ascensão reta do Sol. Após terem sido eliminadas todas as influências sistemáticas conhecidas na época, foram calculados os desvios das 462 observações em relação à média aritmética destas, resultando em 230 resíduos negativos, e em 232 resíduos positivos, com simetria e predomínio de valores em torno da média, isto é, valores dos resíduos em geral próximos de zero.

Desta forma, de maneira resumida, pode-se afirmar que os erros acidentais, embora aleatórios, revelam certa regularidade, e, conforme o número de observações aumenta:

- Os erros aleatórios de mesma magnitude, mas de sinais opostos, são equiprováveis;
- Os erros aleatórios de magnitude menor ocorrem com maior frequência;
- A média aritmética dos erros aleatórios tende a ser nula (zero).

1.4 Erro absoluto e erro relativo

O erro absoluto de uma grandeza corresponde ao valor absoluto (em módulo) deste erro. Por exemplo, no caso do erro angular ser igual a $-3''$, o erro angular absoluto é igual a $|-3| = 3''$. O erro relativo de uma grandeza corresponde ao erro absoluto dividido pelo valor exato (em módulo) desta grandeza. Por exemplo, no caso de um erro de 4 mm em uma distância de 250 m, o erro relativo é igual a $|0,004 \text{ m}| / |250 \text{ m}| = 0,000016 = 1 / 62.500$. Note que o erro absoluto é expresso na mesma unidade de medida da grandeza, enquanto o erro relativo é adimensional (sem unidade). O erro absoluto e o erro relativo podem ser verdadeiros (quando em relação ao valor verdadeiro da grandeza) ou aparentes (quando em relação ao valor de referência desta grandeza).

Em alguns casos, como em grandezas angulares, é mais usual expressar o valor do erro absoluto. Em outros casos, como em grandezas lineares, pode-se expressar

também o valor do erro relativo. Por exemplo, o erro em ppm (partes por milhão), corresponde ao erro de uma unidade a cada um milhão de unidades da grandeza, como 1 mm a cada 1.000.000 de mm, ou seja, 1 mm a cada 1 km. Nestes casos, o erro relativo fornece mais informações do que o erro absoluto, uma vez que, em termos absolutos, o erro de 2 cm em 100 m é igual ao erro de 2 cm em 1 km, entretanto, em termos relativos, o erro de 2 cm em 100 m ($|0,02| / |100| = 1 / 5.000$) é dez vezes maior que o erro de 2 cm em 1 km ($|0,02| / |1000| = 1 / 50.000$).

1.5 Precisão e acurácia de um conjunto de medidas

Conforme já exposto, devido à inevitável existência de erros nas medidas, observações repetidas de uma mesma grandeza irão apresentar valores numéricos diferentes. A discrepância é definida como a diferença algébrica (numérica) entre duas observações de uma mesma grandeza. Quando pequenas discrepâncias (diferenças) existem entre observações repetidas de uma mesma grandeza, geralmente, assume-se que apenas erros pequenos existem nestas observações. Entretanto, valores numéricos “precisos” não são necessariamente valores numéricos “acurados”.

Para ajudar a entender a diferença entre o conceito de precisão e o conceito de acurácia, as seguintes definições são apresentadas:

- Precisão é o grau de consistência entre as observações que formam um conjunto de dados (valores observados), baseado no tamanho das discrepâncias encontradas neste conjunto de valores, ou seja, é uma medida da dispersão interna ou relativa da amostra;
- Acurácia é a medida de “proximidade” absoluta entre uma grandeza medida, ou um conjunto de grandezas medidas, e o seu valor verdadeiro. Como geralmente o valor verdadeiro de uma grandeza não pode ser determinado, a acurácia de uma medida, ou de um conjunto de medidas, na prática, é desconhecida.

A diferença entre precisão e acurácia pode ser demonstrada utilizando como exemplo observações de distância. Assumindo que a distância entre dois pontos foi medida por três métodos diferentes: contagem do número de passos do observador; medição com trena e medição com estação total; e que cada procedimento (método de

medida) foi realizado (repetido) cinco vezes, resulta nos valores apresentados na Tabela 1.1, extraídos de Ghilani & Wolf (2006).

Tabela 1.1 – Cinco observações de uma mesma distância por meio de três métodos de medições diferentes.

Observação	Medidas com passos (m)	Medidas com trena (m)	Medidas com estação total (m)
1	571,4	567,17	567,133
2	562,7	567,08	567,124
3	565,8	567,12	567,129
4	588,6	567,38	567,165
5	556,5	567,01	567,114
Média (m)	569,0	567,15	567,133

Analisando a Tabela 1.1, nota-se que os valores obtidos pela contagem do número de passos apresentam uma dispersão interna muito maior do que os valores obtidos com a utilização da trena ou da estação total, ou seja, dos três métodos considerados, a medição com passos é o que apresenta a menor precisão, isto é, as maiores discrepâncias em seu conjunto de medidas. Nota-se ainda que, na contagem do número de passos, a precisão (discrepâncias) é da ordem de decímetros, na medição com trena, a precisão (discrepâncias) é da ordem de centímetros, e na medição com estação total, a precisão (discrepâncias) é da ordem de milímetros. A Figura 1.4, adaptada de Ghilani e Wolf (2006), permite realizar uma comparação mais detalhada entre os dois últimos métodos analisados.

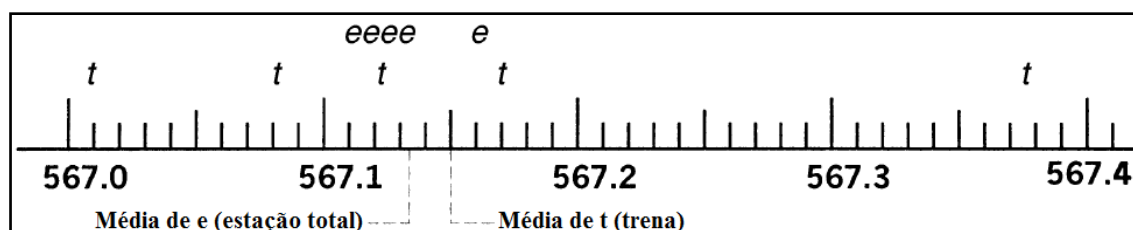


Figura 1.4 – Plotagem dos valores observados com trena (t) e estação total (e).

Analisando a Figura 1.4, nota-se que, embora as médias dos valores obtidos utilizando a estação total e a trena sejam muito próximas (567,133 m e 567,15 m; respectivamente), a dispersão interna dos valores medidos com a estação total é menor do que a dispersão interna dos valores medidos com a trena, ou em outras palavras, neste caso, a precisão do método de medição com estação total é maior do que a precisão do método de medição com trena.

Entretanto, como os valores dos erros que contaminam as medidas são sempre desconhecidos, não necessariamente, a média dos valores da estação total é mais acurada do que a média dos valores da trena. Por exemplo, a estação total pode estar com algum erro de aferição, fazendo com que os valores medidos, e consequentemente, a média aritmética destes, sejam ligeiramente menores do que o valor “verdadeiro”, e desta forma, a média dos valores da trena pode ser uma grandeza mais acurada, ou seja, mais próxima do verdadeiro valor, do que a média dos valores da estação total, embora os valores medidos com trena sejam mais imprecisos.

Além disso, analisando ainda a Figura 1.4, nota-se que o maior valor observado, tanto na medição com trena quanto na medição com estação total, está significativamente mais afastado dos demais (relativos ao mesmo método de medição), podendo indicar a presença de erro grosseiro nas respectivas observações.

Outro exemplo clássico encontrado na Literatura para ilustrar a diferença entre precisão e acurácia envolve quatro atiradores (atiradores a, b, c e d) realizando “tiros ao alvo”, conforme ilustra a Figura 1.5.

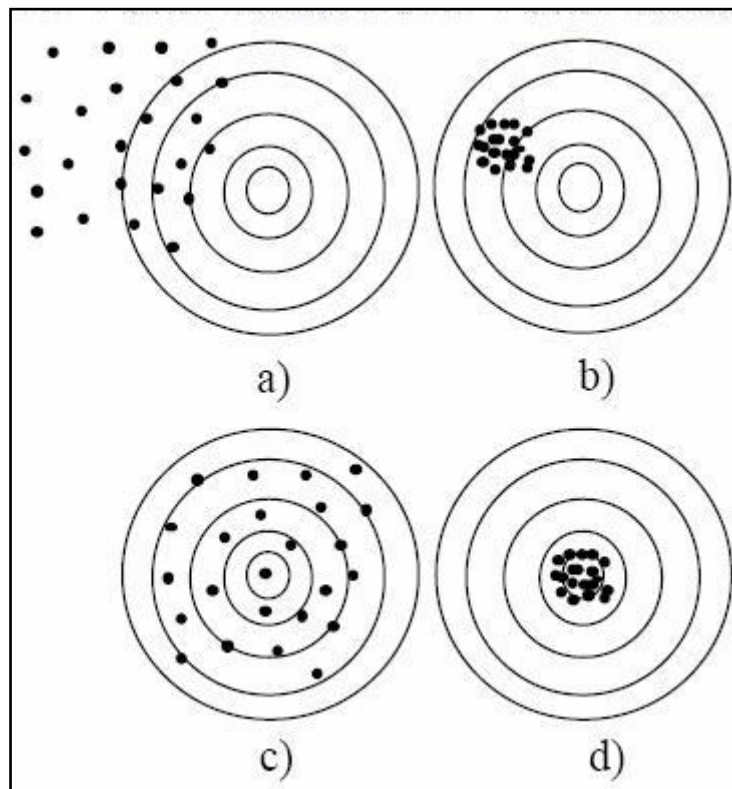


Figura 1.5 – Exemplo clássico dos conceitos de precisão e acurácia utilizando tiros ao alvo.

Analisando os resultados dos tiros na Figura 1.5, nota-se que o atirador a) não foi nem preciso, pois apresenta alta dispersão interna em seus tiros, e nem acurado, pois a média dos seus disparos está muito distante do centro do alvo; o atirador b) foi preciso, com baixa dispersão interna dos seus tiros, mas não foi acurado, pois a média dos seus disparos está relativamente afastada (acima e a esquerda) do centro do alvo; o atirador c) não foi preciso, com alta dispersão interna dos seus tiros, mas foi acurado, pois a média dos seus disparos praticamente coincide com o centro do alvo; enquanto o atirador d) foi preciso, com baixa dispersão interna dos seus tiros, e acurado, pois a média dos seus disparos praticamente coincide com o centro do alvo. Ressalva-se que observador b) pode se tornar acurado, bastando, para isso, corrigir a tendência existente em sua pontaria, no caso, ajusta-la para baixo e para a direita.

Geralmente, quando se realiza um conjunto de medidas, como, por exemplo, o levantamento das divisas de um imóvel, naturalmente, deseja-se obter um resultado semelhante ao encontrado pelo atirador d). Entretanto, como o verdadeiro valor das grandezas medidas é desconhecido, na prática, pode-se determinar apenas se os resultados são pouco discrepantes entre si, ou seja, precisos, como em b) e em d), ou não, como em a) e em c), mas nunca qual a magnitude (se esta existe) de uma possível tendência nos resultados, como em a) e b).

O caso em b) pode ocorrer quando existe um erro sistemático (tendência em comum) em todas as medidas, enquanto o caso em c) pode ocorrer em um método não muito preciso, mas realizado tomando todas as precauções para minimizar possíveis efeitos sistemáticos/cumulativos, como medidas com trena aplicando a tensão correta e evitando a catenária, por exemplo, enquanto o caso em a) ocorre quando as observações não são corrigidas dos erros sistemáticos, e ao mesmo tempo, são efetuadas de maneira displicente/descuidada pelo observador, como por exemplo, calagem (centragem + nivelamento) errônea de um equipamento, e efetuar leituras únicas e despreziosas/apressadas em um levantamento topográfico, o que pode ser atribuído a um profissional mal qualificado, com falta de ética profissional ou inexperiente.

De maneira resumida, observações como nos casos em a) e c) são indesejadas, pois a precisão é baixa e conhecida, mas a acurácia é desconhecida, independente de ser alta ou baixa, observações como no caso em d) são sempre desejadas (precisas e acuradas), e observações como no caso em b) podem ser desejadas, pois são precisas, e também podem ser acuradas, desde que os erros sistemáticos sejam de causas

conhecidas, e desta forma, devidamente corrigidos, além dos erros grosseiros serem evitados e/ou eliminados.

Modernamente, uma corrente de autores define a acurácia como sendo um somatório envolvendo tanto os efeitos de precisão, relacionados aos erros aleatórios, quanto os efeitos de tendência, relacionados aos erros sistemáticos e/ou grosseiros. Desta maneira, na ausência de tendência nos valores medidos, ou seja, existência somente de erros aleatórios nas observações, o conceito de precisão se confunde com o conceito de acurácia.

2. CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Conforme visto no capítulo anterior, observações realizadas em um processo de medição qualquer são contaminadas por erros dos mais diversos tipos. Estes erros podem ser de natureza determinística (erros sistemáticos), de natureza probabilística (erros aleatórios) ou falhas (erros grosseiros). Os erros aleatórios ou acidentais são inevitáveis, sendo uma característica intrínseca da observação, relacionados com a própria precisão da medida; como a técnica empregada; equipamento utilizado, limitação ou experiência do observador, condições de observação e etc.

Portanto, como toda observação está sujeita aos inevitáveis erros aleatórios, de natureza probabilística, algumas noções sobre probabilidade e estatística se fazem necessárias. Inicialmente, são apresentadas as seguintes definições:

- **Observação:** Uma observação (medida), ou um evento estatístico, é o resultado de um experimento estatístico, como por exemplo, a medição de uma distância;
- **Variável aleatória e vetor aleatório:** Uma variável aleatória é o resultado de um evento estatístico, ou seja, de uma observação. Uma variável aleatória pode ser de natureza discreta (número inteiro) ou contínua (número real). Um vetor aleatório é um vetor cujas as componentes (elementos) são variáveis aleatórias;
- **População e parâmetros populacionais:** Uma população é a totalidade de todos os eventos, isto é, inclui todos os possíveis valores que uma variável aleatória pode assumir. A população é descrita por um conjunto finito de parâmetros, denominados parâmetros populacionais. A distribuição normal, por exemplo, descreve uma população de eventos completamente especificada por apenas dois parâmetros: média e variância populacional;
- **Amostra:** Uma amostra é um subconjunto da população. Por exemplo, se uma mesma distância é medida (observada) dez vezes, então estas dez observações formam uma amostra (subconjunto) de todas as medições possíveis deste experimento, isto é, da população deste evento estatístico;
- **Estatística, estimador e estimativa:** Uma estatística representa uma estimativa de parâmetros populacionais, ou uma função destes parâmetros. A estatística é

obtida a partir de uma amostra da população. Por exemplo, se uma mesma distância é medida dez vezes, então a média amostral destas dez observações pode ser utilizada para estimar a média populacional deste experimento. O estimador é a média amostral, e a estimativa é valor numérico da média amostral, calculado em função da amostra observada;

- Probabilidade: A probabilidade está relacionada com a frequência de ocorrência de um evento (observação) em específico. No caso de variáveis aleatórias contínuas, cada intervalo numérico $[a, b]$ no qual a variável aleatória $\underline{x}$ pode estar contida tem uma probabilidade de ocorrência associada, definida por $P(a \leq \underline{x} \leq b)$, e esta sempre está contida entre $0 \leq P(a \leq \underline{x} \leq b) \leq 1$ (ou analogamente, entre 0 e 100%);
- Função densidade de probabilidade: A função densidade de probabilidade (fdp) relaciona a probabilidade dos possíveis valores de uma variável aleatória contínua $\underline{x}$. Se $f(\underline{x})$ denota a função densidade de probabilidade de $\underline{x}$, então:

$$P(a \leq \underline{x} \leq b) = \int_a^b f(\underline{x}) dx$$

é a probabilidade desta variável aleatória $\underline{x}$ assumir um valor dentro do intervalo contínuo $[a, b]$. Por exemplo, se para uma distância entre dois pontos (variável aleatória $\underline{x}$), tem-se: $P(100 \leq \underline{x} \leq 100,1) = 0,7 = 70\%$, então a probabilidade de uma medida qualquer desta distância apresentar um valor entre 100 e 100,1 m é de 70%.

2.1 Principais estatísticas (estimadores amostrais)

Sabe-se que o verdadeiro valor de uma grandeza nunca será conhecido pelo observador, pela inevitável existência de erros no processo de medidas. Desta forma, os parâmetros populacionais, como a média e a variância de uma grandeza, também não poderão ser determinados. Entretanto, eles podem ser estimados por meio de uma amostra desta grandeza, como por exemplo, por meio de “ n ” observações de uma mesma distância. Como exemplos de estatísticas, ou seja, estimadores dos parâmetros

de uma população, têm-se a média amostral, a variância amostral e o desvio-padrão amostral, dentre outros.

A média amostral é uma medida de tendência central (posição) de uma variável aleatória. Para uma amostra de n medidas de uma mesma grandeza (X), a média amostral destas n medidas é dada por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

A média amostral ($\bar{X}$) é uma estimativa da verdadeira (e desconhecida) média populacional (μ). Ressalta-se que existem outras medidas de tendência central, como a moda e a mediana. Em geral, somente a média amostral é aplicada em problemas das ciências geodésicas e áreas afins, embora a mediana seja um estimador mais insensível a presença de erros grosseiros nas medições.

A variância amostral, ao contrário da média amostral, é uma medida de dispersão (isto é, variação) de uma variável aleatória. Para uma amostra de n medidas de uma mesma grandeza (X), a variância amostral destas n medidas é dada por:

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

A variância amostral (S^2) é uma estimativa da verdadeira (e desconhecida) variância populacional (σ^2).

Assim como a variância amostral, o desvio-padrão amostral também é uma medida de dispersão (variação) de uma variável aleatória, mas, ao contrário de S^2 , possui a mesma unidade de medida da variável aleatória em estudo, o que facilita a sua interpretação. Para uma amostra de n medidas de uma mesma grandeza (X), o desvio-padrão amostral destas n medidas é dado por:

$$S = \pm \sqrt{S^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

O desvio-padrão amostral (S) é uma estimativa do verdadeiro (e desconhecido) desvio-padrão populacional (σ).

É importante buscar realizar o maior número de observações possíveis de uma grandeza qualquer X , pois, de acordo com o teorema central do limite, conforme o número de observações (n) aumenta, a média amostral das observações ($\bar{X}$) converge para a verdadeira média populacional desta grandeza (μ), e a variância amostral das observações (S^2) decresce na proporção $1/n$. Em outras palavras, o desvio-padrão da média amostral ($\bar{X}$), também denominado de erro padrão da amostra, é dado por:

$$S_{\bar{X}} = \pm \frac{S}{\sqrt{n}}$$

De maneira resumida, pode-se dizer que conforme o número de observações (n) aumenta, a acurácia e a precisão da média amostral aumentam.

2.2 Distribuição normal de probabilidade

Uma das funções densidade de probabilidade mais importante é a distribuição normal, pois uma série de fenômenos físicos e financeiros podem ser descritos por meio desta distribuição de probabilidade. Nas ciências geodésicas, assume-se que os erros aleatórios, e, conseqüentemente, as observações (medidas realizadas), seguem distribuição normal.

A distribuição normal é completamente descrita por dois parâmetros: média (μ) e variância (σ^2) da variável aleatória em estudo ($\underline{x}$). Ou seja, conhecendo-se estes dois parâmetros, pode-se determinar qualquer probabilidade em uma distribuição normal. A fdp de uma variável aleatória qualquer ($\underline{x}$) que segue distribuição normal é dada por:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[\frac{-(\underline{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

E, portanto, a probabilidade desta variável aleatória ($\underline{x}$) se situar dentro de um intervalo numérico fechado $[a, b]$ é dada por (ver também a Figura 2.1):

$$P(a \leq \underline{x} \leq b) = \int_a^b f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[\frac{-(\underline{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} d\underline{x}$$

A distribuição normal padrão é uma distribuição normal de probabilidades com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Para uma variável aleatória qualquer (x) que segue distribuição normal com $\mu \neq 0$ e $\sigma^2 \neq 1$, pode-se obter uma nova variável aleatória (z), que segue distribuição normal padrão, ou seja, com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, e, desta forma, ao invés de calcular a integral na expressão anterior, pode-se obter os valores de probabilidade de ocorrência de um intervalo numérico fechado qualquer, por meio da consulta de valores tabelados para a distribuição normal padrão.

A distribuição normal de probabilidade apresenta simetria em relação à média (μ), ou seja, intervalos de valores acima e abaixo da média são equiprováveis, e algumas das principais propriedades da distribuição normal são apresentadas na Figura 2.1.

A título de exemplo, considere que uma variável aleatória segue distribuição normal com média $\mu = 100\text{ m}$ e variância $\sigma^2 = 1\text{ m}^2$, logo, existe 68,3% de probabilidade do valor de uma observação qualquer desta variável aleatória se situar entre 99 e 101 m (ou seja, entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$), existe 95,5% de probabilidade do valor de uma observação qualquer desta variável aleatória se situar entre 98 e 102 m (ou seja, entre $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$), e existe 99,7% de probabilidade do valor de uma observação qualquer desta variável aleatória se situar entre 97 e 103 m (ou seja, entre $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$).

A probabilidade associada é definida como nível de confiança (NC), enquanto o intervalo de valores é definido como intervalo de confiança (IC). Neste mesmo exemplo, o intervalo numérico entre 99 e 101 (IC) corresponde ao nível de confiança de 95,5% ($NC = 0,955$).

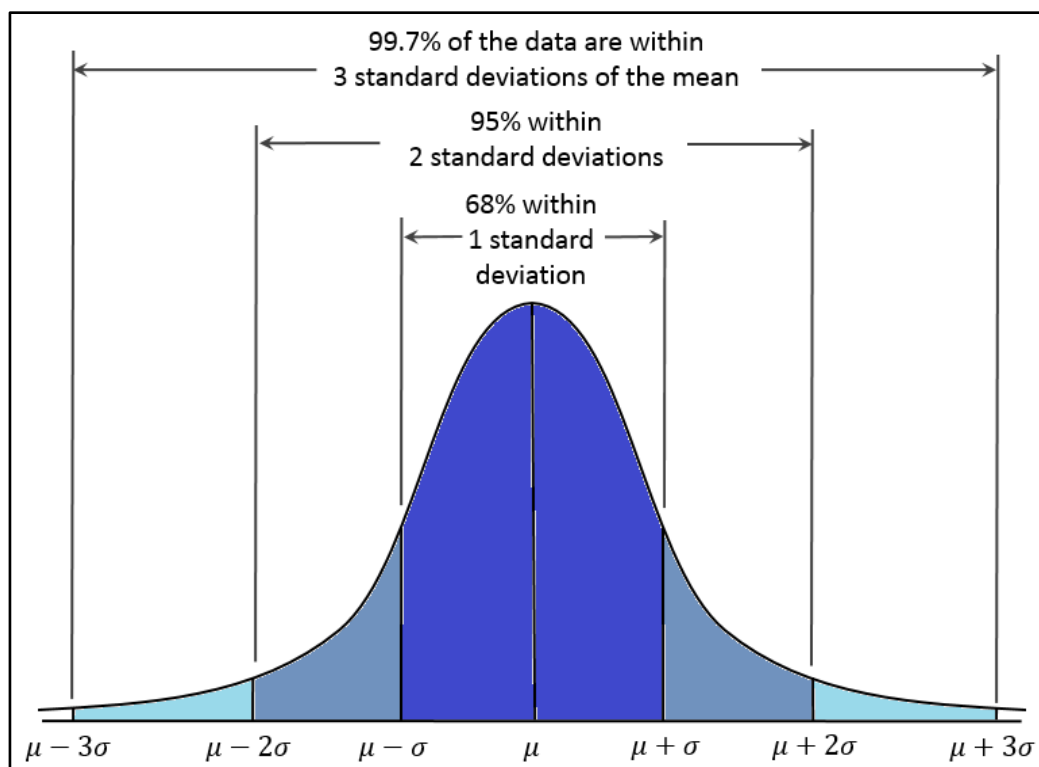


Figura 2.1 – Distribuição normal e principais intervalos de confiança associados.

Como o nível de confiança correspondente ao intervalo entre a média menos três desvios-padrões e a média mais três desvios-padrões é de 99,7%, usualmente, presumindo-se ausência de erros grosseiros ou sistemáticos, considera-se três vezes a precisão do conjunto de medidas como um valor para a acurácia (exatidão) deste conjunto de medidas, devido ao alto nível de confiança associado.

Por exemplo, para uma estação total com PN angular de $\pm 2''$, pode-se inferir que a acurácia (exatidão) das medidas angulares deste instrumento é de $3 \cdot 2'' = \pm 6''$, ou, em outras palavras, que uma leitura angular qualquer pode estar $\pm 6''$ defasada em relação ao seu “verdadeiro” valor.

2.3 Aceitação e rejeição de medições

O desvio-padrão de uma grandeza é uma medida de precisão, ou seja, da variação ou dispersão esperada desta grandeza. Desta forma, pode-se definir critérios de aceitação ou rejeição de observações em função da comparação do resíduo (ou erro aparente) de cada observação (isto é, diferença em relação à média) e o respectivo desvio-padrão destas observações.

Em termos gerais, quando o valor observado (medido) de uma grandeza apresenta um resíduo superior à três desvios-padrões desta grandeza, no caso do

exemplo anterior, valores inferiores a 97 *m* ou superiores a 103 *m*, pode-se afirmar que esta observação é um *outlier*, e, como a probabilidade de ocorrência deste valor observado é muito pequena (inferior a 0,3%), pode-se inferir que a observação em questão está contaminada por algum erro grosseiro.

O desvio-padrão de referência pode ser o desvio-padrão amostral (S) ou o desvio-padrão fornecido pelo fabricante (precisão nominal do instrumento utilizado). É importante ressaltar que caso duas ou mais observações apresentem resíduos superiores a três desvios-padrões, apenas a observação de maior resíduo (em módulo) deve ser excluída, pois, cada vez que uma observação é excluída da amostra, têm-se uma nova média amostral e conseqüentemente novos valores para os resíduos das observações restantes, uma vez que a amostra inicial foi alterada.

Esta estratégia evita que outras observações sejam excluídas erroneamente, pois todos os resíduos podem apresentar valores menores que três desvios-padrões, em módulo, após a exclusão da observação de maior resíduo e da obtenção da nova média amostral para as observações restantes. Este procedimento deve ser aplicado iterativamente até nenhuma observação ser excluída.

Idealmente, deve-se realizar duas ou mais medições de uma mesma grandeza, para obter a média e o desvio-padrão amostral deste conjunto de medidas. Porém, muitas vezes, pode-se realizar uma única medição e adotar o valor da precisão nominal como sendo o respectivo desvio-padrão desta única medida realizada. Ressalta-se que no primeiro caso é possível realizar um controle das medições, enquanto o segundo caso apresenta maior rendimento (produtividade) em campo. Dependendo da finalidade, um ou outro pode ser empregado.

Por exemplo, no estabelecimento de redes de referência, é fundamental a repetição das observações e o controle de erros grosseiros em campo, enquanto em um levantamento planialtimétrico de detalhes, onde serão levantados dezenas ou centenas de pontos, nem todos os pontos necessitam de repetidas observações, contanto que sejam tomados os devidos cuidados para evitar possíveis erros grosseiros de medição e que os erros sistemáticos sejam devidamente corrigidos ou minimizados.

Além disso, duas medições de uma mesma grandeza possibilitam controle (detecção de discrepâncias), mas não possibilitam a identificação de erros grosseiros, pois não se pode identificar qual observação está de fato contaminada dentre as duas. Para detecção de um único erro grosseiro por meio da análise dos resíduos em relação à

média, deve-se realizar três ou mais medidas; para a detecção de dois erros grosseiros, deve-se realizar quatro ou mais medidas e assim por diante.

2.4 Precisão nominal, leitura mínima, calibração e ajuste

Conforme mencionado anteriormente, a precisão nominal (PN) é a precisão (desvio-padrão) do equipamento especificada pelo fabricante. É um valor seguro que garante a idoneidade do fabricante. É definida pela norma alemã DIN18723, adotada internacionalmente em um grande lote de equipamentos produzidos. O Anexo C da NBR 13.133/94 especifica o procedimento utilizado para o cálculo da PN nominal do equipamento.

Normalmente, a PN angular dos goniômetros é dada em segundos de arco e a PN linear dos diastímetros é dada em $\pm(a \text{ mm} + b \text{ ppm})$, onde a é constante e independente da distância e b é proporcional à distância, expressa em partes por milhão (ppm), sendo que $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mm/km}$. Por exemplo, a estação total *Leica TS50* apresenta PN angular de $\pm 0,5''$ e PN linear de $\pm 0,6 \text{ mm} + 1 \text{ ppm}$ (medição com prisma refletor).

A leitura mínima é a menor graduação que um equipamento pode apresentar. A leitura mínima não é igual à PN do equipamento. Muitas vezes, é possível estimar uma leitura abaixo da mínima, mas a leitura mínima continua sendo definida pela menor graduação do equipamento. Por exemplo, no caso de uma mira com graduação centimétrica, onde a leitura mínima é 1 cm , mas, pode-se estimar a leitura dos milímetros na execução de um nivelamento altimétrico.

É importante ressaltar que a PN do equipamento pode ser superior ou inferior à leitura mínima deste. Por exemplo, uma estação total com PN angular de $\pm 5''$ e leitura mínima de $1''$, ou uma trena de aço classe I de acordo com a NBR 10123/1987, com PN milimétrica e leitura mínima (graduação) de 2 cm .

Outros conceitos importantes dizem respeito à calibração (aferição) e ajuste (regulagem) de um instrumento. Calibrar ou aferir significa determinar diferenças (discrepâncias) entre valores medidos com determinado instrumento e valores de referência previamente conhecidos. O instrumento de medição não sofre alteração alguma. Ajustar ou regular consiste em interferir no instrumento de tal forma que os desvios (discrepâncias) das medições sejam reduzidos ao mínimo possível, ou que as discrepâncias não ultrapassem limites previamente estabelecidos.

Um exemplo é medir distâncias com uma estação total em uma base conhecida. A aferição ou calibração consiste em constatar diferenças entre os valores medidos com a estação total e os valores de referência; enquanto o ajuste (regulagem) diz respeito à modificação (manutenção) da estação total, de tal forma que essas diferenças sejam reduzidas. É recomendado realizar regularmente (por exemplo, anualmente) a aferição, e, se necessário, o ajuste do equipamento, ou após qualquer suspeita do mesmo estar apresentando erros sistemáticos em suas medidas.

2.5 Covariância e coeficiente de correlação das observações

Em Topografia e Geodésia, usualmente, assume-se que as covariâncias entre as observações são nulas, ou seja, não existe correlação (dependência estatística) entre os diferentes valores observados. Entretanto, a covariância de duas observações, ou seja, a variância conjunta destas medidas, pode ser não nula. Em outras palavras, a variação nos valores de uma grandeza pode estar correlacionada com as variações nos valores de outra grandeza, isto é, elas podem ser estatisticamente dependentes. Tal fato pode afetar as relações anteriormente apresentadas.

Desta forma, em teoria dos erros, pode-se interpretar a correlação como resultado das duas grandezas estarem contaminadas pelos mesmos tipos de erros, ou seja, as fontes de erros nas duas medidas são as mesmas. Logo, variações em um valor observado (medido) y_i , devido a erros nesta medida, também resultam em variações para outro valor observado (medido) y_j , devido ao fato dos mesmos tipos de erros também estarem contaminando esta medida.

Matematicamente, a covariância $\sigma_{y_i y_j}$ de um conjunto de n medidas para duas variáveis quaisquer y_i e y_j é dada por:

$$\sigma_{y_i y_j} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (y_i - \bar{y}_i)(y_j - \bar{y}_j)$$

onde $\bar{y}_i$ é o valor médio das n medidas para a variável y_i e $\bar{y}_j$ é o valor médio das n medidas para a variável y_j . A covariância entre duas grandezas, ao contrário da variância de uma grandeza (S^2 ou σ^2), pode ser positiva ou negativa.

Covariância positiva significa que quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui, enquanto

covariância negativa significa que quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e vice-versa. Quando a covariância for nula ($\sigma_{y_i y_j} = 0$), as duas observações são ditas estatisticamente independentes ou decorrelacionadas. Naturalmente, $\sigma_{y_i y_j} = \sigma_{y_j y_i}$, ou seja, a covariância entre y_i e y_j é igual à covariância entre y_j e y_i .

Como exemplos de observações decorrelacionadas, pode-se citar sucessivas medições com estação total ou nível topográfico, pois se assume que o valor medido para uma distância, ângulo ou desnível, não terá qualquer influência sobre o valor medido de outra distância, ângulo ou desnível.

Como exemplo de observações correlacionadas, pode-se citar as componentes 3D de uma linha-base no posicionamento relativo GNSS, pois são os mesmos satélites e receptores envolvidos no posicionamento, e desta forma, são as mesmas fontes de erro que contaminam cada uma das três componentes da linha-base, resultando em três observáveis correlacionadas entre si.

Outro exemplo diz respeito às coordenadas dos pontos de controle em um problema de estação livre. Em geral, os mesmos métodos e observações são utilizados para determinar as coordenadas de um ponto de controle, resultando em correlação de erros nas coordenadas deste ponto de controle.

Além da covariância, o coeficiente de correlação indica o quanto duas variáveis aleatórias são estatisticamente relacionadas ou não. Para relações lineares, um dos coeficientes de correlação mais utilizados neste sentido é o coeficiente de correlação de Pearson, dado por:

$$\rho_{y_i y_j} = \frac{\sigma_{y_i y_j}}{\sigma_{y_i} \sigma_{y_j}}$$

onde σ_{y_i} é o desvio-padrão de y_i e σ_{y_j} é o desvio padrão de y_j . O coeficiente de correlação de Pearson varia entre -1 e $+1$, onde $\rho_{y_i y_j} = -1$ indica perfeita correlação negativa (linear), e $\rho_{y_i y_j} = 1$ indica perfeita correlação positiva (linear), enquanto $\rho_{y_i y_j} = 0$, que ocorre quando $\sigma_{y_i y_j} = 0$, indica que as duas variáveis aleatórias são linearmente independentes (Figuras 2.2 e 2.3).

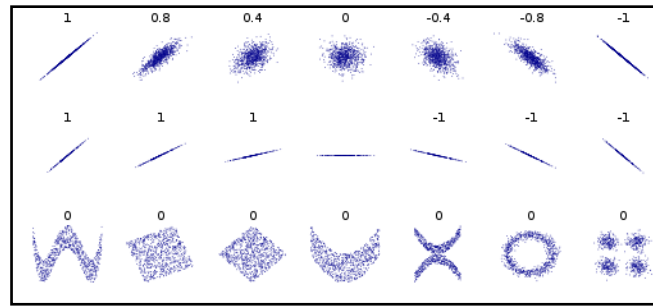


Figura 2.2 – Exemplos de amostras e os respectivos valores de correlação.

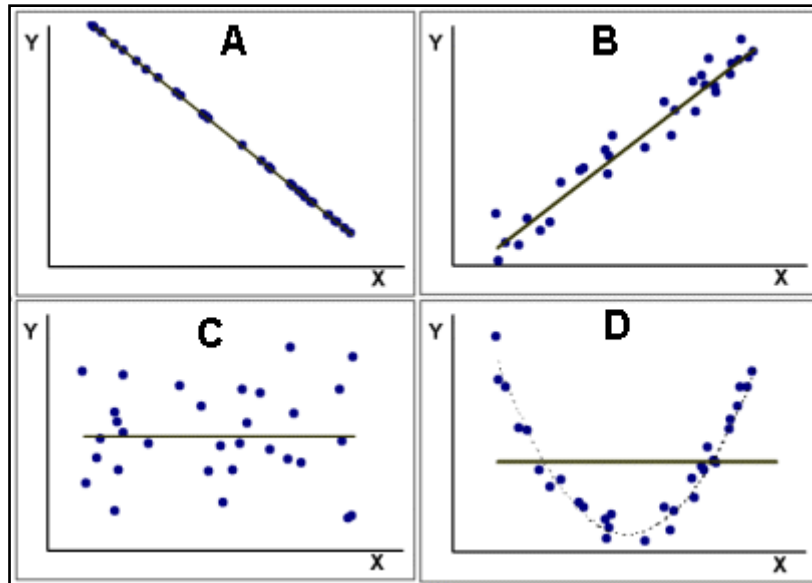


Figura 2.3 – Exemplos de alta, baixa, e nula correlação linear entre duas variáveis x e y.

2.6 Erro quadrático médio (EQM)

Conforme visto anteriormente, o desvio-padrão é um indicativo da precisão de um conjunto de medidas, ou seja, da dispersão desta amostra em relação à sua média. Entretanto, quando se conhece um valor de referência de alta confiança para a grandeza observada (superior à média amostral), pode-se determinar um indicador do erro médio deste conjunto de medidas.

Desta forma, o erro quadrático médio (EQM) é a esperança do quadrado da diferença entre o valor estimado e o valor verdadeiro ou de referência. Muitas vezes, é mais interessante analisar a raiz quadrada do EQM, por apresentar a mesma unidade de medida do conjunto de observações realizadas. Nestes casos, o RMSE (*root mean square error*) de um conjunto de valores x_i (para $i = 1, 2, 3, \dots, n$) é dado por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}}$$

O RMSE é calculado quando se conhece um valor de referência (μ), como por exemplo, as coordenadas conhecidas de um ponto de controle, fornecendo informação sobre a exatidão “média” da amostra, isto é, analisando os erros “verdadeiros”. Na maioria das aplicações, o valor de referência será a média amostral, podendo-se obter informação somente da precisão por meio do desvio-padrão amostral (S) e do erro padrão da amostra ($S_{\bar{X}}$), isto é, analisando os erros aparentes.

3. PROPAGAÇÃO DE ERROS

Uma grandeza x , que é calculada ou estimada em função de outras n grandezas que foram medidas ou observadas ($y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$), pode ser representada por:

$$x = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

onde na expressão acima, representa-se o fato de que a grandeza desconhecida (ou parâmetro) x é calculada (estimada) em função das n grandezas conhecidas ou observadas ($y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$), ou seja, por meio de relações matemáticas conhecidas relacionando os valores que foram medidos. Considerando que os valores observados ($y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$) são grandezas experimentais, ou seja, possuem incertezas (variâncias) associadas, se os erros nas n observações são completamente independentes, ou seja, as covariâncias entre estas são nulas, então a variância da grandeza calculada ou estimada x é dada por:

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2$$

Onde:

- $\frac{\partial x}{\partial y_i}$ é a derivada parcial da função $x = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ em relação a grandeza y_i (para $i = 1, 2, 3, \dots, n$);
- $\sigma_{y_i}^2$ é a correspondente variância da grandeza y_i (para $i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Note que como as variâncias $\sigma_{y_i}^2$ são sempre positivas, e os termos $\left(\frac{\partial x}{\partial y_i}\right)^2$ também são sempre positivos, a variância resultante (σ_x^2) para a grandeza calculada x também será sempre positiva.

A expressão anterior, apresentada para a propagação de erros na forma algébrica, é incompleta, pois considera somente as variâncias (e não as covariâncias) das observações envolvidas. Para os casos em que as covariâncias entre as grandezas medidas são não nulas, isto é, quando as observações são correlacionadas, é

recomendado utilizar a propagação de erros na forma matricial, por meio da lei de propagação de variâncias e covariâncias.

A propagação de erros é um tema de fundamental importância em Topografia e Geodésia, pois todas as grandezas mensuradas em um levantamento, como medições lineares e angulares, por exemplo, possuem incertezas (precisões) associadas. Uma vez que as coordenadas dos pontos levantados são grandezas obtidas em função destas mensurações, por meio de relações matemáticas conhecidas, inevitavelmente, haverá uma propagação de erros dos valores medidos (observados) para os valores obtidos (calculados) do levantamento.

A aplicação e análise da propagação de erros é de extremo interesse ao profissional, pois permite determinar qual a precisão dos resultados finais de um levantamento topográfico ou geodésico, ou seja, possibilita inferir qual é a qualidade final do serviço realizado, considerando a propagação de erros de todas as medições envolvidas.

Dentre alguns fatores que afetam o resultado da propagação de erros, pode-se citar a quantidade de pontos de controle; a qualidade (precisão) dos pontos de controle; a distribuição espacial dos pontos (geometria do levantamento); a precisão do equipamento e do método (técnica de medição) empregado; o número de observações realizadas, dentre outros.

Ressalta-se que a propagação de erros considera somente a influência de erros de natureza probabilística, isto é, dos erros aleatórios. Erros sistemáticos ou grosseiros devem ser evitados, minimizados, corrigidos ou devidamente identificados e excluídos por meio de rotinas de controle. A propagação de erros (aleatórios) somente é realizada após todo o tratamento de erros sistemáticos e/ou grosseiros nas observações.

3.1 Algumas relações matemáticas e derivadas parciais em propagação de erros

A seguir são apresentadas algumas derivadas parciais genéricas para propagação de erros. Ao leitor interessado, o *website WolframAlpha* disponibiliza uma biblioteca *online* gratuita com diversas ferramentas matemáticas, incluindo o cálculo diferencial e integral, por meio do seguinte endereço eletrônico: <http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>.

- Soma ou subtração de grandezas: Se $x = y_1 - y_2 + y_3$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = +1$;

$$\frac{\partial x}{\partial y_2} = -1; \quad \frac{\partial x}{\partial y_3} = +1.$$

- Soma ou subtração de grandezas multiplicadas por termos (valores) constantes: Se $x = ay_1 - by_2 + c$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = a$; $\frac{\partial x}{\partial y_2} = -b$; $\frac{\partial x}{\partial c} = 1$, com a, b e c constantes.
- Produto de variáveis: Se $x = y_1y_2 - ay_3y_4$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = y_2$; $\frac{\partial x}{\partial y_2} = y_1$; $\frac{\partial x}{\partial y_3} = -ay_4$; $\frac{\partial x}{\partial y_4} = -ay_3$, com a sendo uma constante qualquer.
- Razão de variáveis: Se $x = \frac{ay_1}{y_2}$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{a}{y_2}$; $\frac{\partial x}{\partial y_2} = \frac{-ay_1}{y_2^2}$, com a constante.
- Produtos de expoentes: Se $x = ay_1^2y_2^3 - by_3^4 + y_4^5$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = 2ay_1y_2^3$; $\frac{\partial x}{\partial y_2} = 3ay_1^2y_2^2$; $\frac{\partial x}{\partial y_3} = -4by_3^3$; $\frac{\partial x}{\partial y_4} = 5y_4^4$, com a e b sendo constantes quaisquer.
- Funções trigonométricas: Se $x = a \operatorname{sen}(y_1) + b \cos(y_2) - c \operatorname{sen}(dy_3) - e \cos(f y_4^2)$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = a \cos(y_1)$; $\frac{\partial x}{\partial y_2} = -b \operatorname{sen}(y_2)$; $\frac{\partial x}{\partial y_3} = -c d \cos(dy_3)$; $\frac{\partial x}{\partial y_4} = 2 e f \operatorname{sen}(f y_4^2) y_4$, com a, b, c, d, e, f sendo constantes quaisquer.
- Funções exponenciais e logarítmicas: Se $x = ae^{by_1} - c \ln dy_2$, então: $\frac{\partial x}{\partial y_1} = a b e^{by_1}$, $\frac{\partial x}{\partial y_2} = -\frac{c d}{y_2}$, com a, b, c, d sendo iguais a constantes quaisquer.

3.2 Propagação de erros em Topografia e Geodésia

A seguir, é apresentando um formulário para a propagação de erros esperados/incertezas/precisões/desvios-padrões de modo simplificado, isto é, desconsiderando

eventuais correlações entre as observações, em alguns dos principais modelos matemáticos utilizados em Topografia e Geodésia. Considere “ σ ” = desvio-padrão da respectiva grandeza em todo o formulário, expresso em metros para grandezas lineares, em metros quadrados para grandezas de superfície (área) e em segundos de arco sexagesimal para grandezas angulares.

Nivelamento geométrico

Considere H_V = cota/altitude da vante; H_R = cota/altitude da ré; DN = desnível da ré para a vante; H_I = cota/altitude do plano de visada ou “altura do instrumento”; L_V = leitura na vante; L_R = leitura na ré:

$$H_V = H_R + DN, \quad DN = H_I - L_V - (H_I - L_R) = L_R - L_V$$

$$\sigma_{H_V} = \pm \sqrt{\sigma_{H_R}^2 + \sigma_{DN}^2}, \quad \sigma_{DN} = \pm \sqrt{\sigma_{L_R}^2 + \sigma_{L_V}^2}$$

Considerando $\sigma_{L_R} = \sigma_{L_V} = k \cdot DH$, onde k = constante nominal para uma leitura única na régua, em função do nível e da régua/mira utilizada (por exemplo: $k = 0,0006 \text{ m}/30 \text{ m} = 0,00002$ para leituras no modo eletrônico do nível digital *Leica Sprinter 150*) e $\overline{DH}$ = distância horizontal média do instrumento a cada ponto visado, tem-se:

$$\sigma_{H_V} = \pm \sqrt{\sigma_{H_R}^2 + 2(k \cdot \overline{DH})^2}$$

Nivelamento trigonométrico com estação total

Considere H_V = cota/altitude do ponto visado/vante; H_I = cota/altitude do ponto de estação; DN = desnível do ponto de estação para o ponto visado/vante; DI = distância inclinada; Z = ângulo zenital de visada; A_i = altura do instrumento/estação total; A_s = altura do sinal refletido:

$$H_V = H_I + DN, \quad DN = A_i + DI \cos Z - A_s$$

$$\sigma_{H_V} = \pm \sqrt{\sigma_{H_I}^2 + \sigma_{D_N}^2},$$

$$\sigma_{D_N} = \pm \sqrt{\sigma_{A_i}^2 + (\cos Z)^2 \sigma_{D_I}^2 + (DI \sin Z)^2 \left(\sigma_Z \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2 + \sigma_{A_s}^2}$$

Assumindo $\sigma_{A_i} = \sigma_{A_s} = \pm 2mm$, a expressão acima se torna:

$$\sigma_{H_V} = \pm \sqrt{\sigma_{H_I}^2 + \sigma_{D_N}^2},$$

$$\sigma_{D_N} = \pm \sqrt{0,000008 + (\cos Z)^2 \sigma_{D_I}^2 + (DI \sin Z)^2 \left(\sigma_Z \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}$$

Cálculo da distância total utilizando “n” distâncias parciais

Considere D = distância total; d_i = i -ésima distância parcial para $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$D = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n, \quad \sigma_D = \pm \sqrt{\sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2 + \sigma_{d_3}^2 + \dots + \sigma_{d_n}^2}$$

A distância considerada pode ser horizontal, como por exemplo, distâncias parciais com trena para obtenção do perímetro de um polígono, ou vertical, como por exemplo, múltiplos lances em um nivelamento altimétrico.

Irradiação planimétrica/método polar

Considere X = coordenada leste do ponto visado/vante; Y = coordenada norte do ponto visado/vante; X_0 = coordenada leste do ponto de estação; Y_0 = coordenada norte do ponto de estação;

DH = distância horizontal do ponto de estação ao ponto visado/vante; Az = azimute do ponto de estação ao ponto visado/vante; DI = distância inclinada do ponto de estação ao ponto visado/vante; Z = ângulo zenital de visada a vante; $Az_{R\acute{E}}$ = azimute do ponto de estação à ré; I = ângulo horizontal irradiado da direção da ré à direção da vante no sentido horário; H_z^V = direção horizontal lida no ponto visado/vante; H_z^R = direção horizontal lida na ré; σ_c = erro de centragem do instrumento em segundos de arco sexagesial; ε = erro de centragem do instrumento em metros; $DH_{R\acute{E}}$ = distância do ponto de estação ao vértice de ré:

$$X = X_0 + DH \sen Az, \quad Y = Y_0 + DH \cos Az$$

$$\sigma_X = \pm \sqrt{\sigma_{X_0}^2 + (\sen Az)^2 \sigma_{DH}^2 + (DH \cos Az)^2 \left(\sigma_{Az} \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}$$

$$\sigma_Y = \pm \sqrt{\sigma_{Y_0}^2 + (\cos Az)^2 \sigma_{DH}^2 + (DH \sen Az)^2 \left(\sigma_{Az} \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}$$

$$DH = DI \sen Z, \quad \sigma_{DH} = \pm \sqrt{(\sen Z)^2 \sigma_{DI}^2 + (DI \cos Z)^2 \left(\sigma_Z \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}$$

$$Az = Az_{R\acute{E}} + I, \quad I = HZ^V - HZ^R$$

$$\sigma_{Az} = \pm \sqrt{(\sigma_{Az_{R\acute{E}}})^2 + (\sigma_I)^2}, \quad \sigma_I = \pm \sqrt{(\sigma_{Hz^V})^2 + (\sigma_{Hz^R})^2 + (\sigma_c)^2},$$

$$\sigma_c = \pm \left(\frac{648000}{\pi} \frac{\sqrt{DH_{R\acute{E}}^2 + DH^2}}{DH_{R\acute{E}} \cdot DH} \right) \varepsilon_c$$

Assumindo $\varepsilon_c = \pm 0,0015 \text{ m}$ na expressão acima, resulta em: $\sigma_c = \pm \left(\frac{972}{\pi} \frac{\sqrt{DH_{R\acute{E}}^2 + DH^2}}{DH_{R\acute{E}} \cdot DH} \right)$

Para a precisão planimétrica resultante do ponto irradiado, considerar:

$$\sigma_{2D} = \pm \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \pm \sqrt{\sigma_{X_0}^2 + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{DH}^2 + DH^2 \left(\sigma_{Az} \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}.$$

Cálculo do azimuth do ponto i ao ponto j em função de suas coordenadas planimétricas

Considere Az = azimuth do ponto i ao ponto j ; X_i = coordenada leste do ponto i ; Y_i = coordenada norte do ponto i ; X_j = coordenada leste do ponto j ; Y_j = coordenada norte do ponto j ; C = constante obtida em função da análise de quadrante do azimuth:

$$Az = \tan^{-1} \left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} \right) + C$$

$$\sigma_{Az} = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{\partial Az}{\partial X_j} \right)^2 \sigma_{X_j}^2 + \left(\frac{\partial Az}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \left(\frac{\partial Az}{\partial Y_j} \right)^2 \sigma_{Y_j}^2 + \left(\frac{\partial Az}{\partial Y_i} \right)^2 \sigma_{Y_i}^2} \right] \cdot \left(\frac{648000}{\pi} \right)$$

$$\frac{\partial Az}{\partial X_j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{\left[(X_i - X_j)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]}, \quad \frac{\partial Az}{\partial X_i} = \frac{(Y_i - Y_j)}{\left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]}$$

$$\frac{\partial Az}{\partial Y_j} = \frac{(X_i - X_j)}{\left[(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 \right]}, \quad \frac{\partial Az}{\partial Y_i} = \frac{(X_j - X_i)}{\left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]}$$

Considerando $(X_i - X_j)^2 = (X_j - X_i)^2 = \Delta X^2$; $(Y_i - Y_j)^2 = (Y_j - Y_i)^2 = \Delta Y^2$ e o quadrado da distância horizontal entre os dois pontos como sendo $DH^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2$, a expressão para a precisão do azimuth se torna:

$$\sigma_{Az} = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{\Delta Y}{DH^2} \right)^2 (\sigma_{X_j}^2 + \sigma_{X_i}^2) + \left(\frac{\Delta X}{DH^2} \right)^2 (\sigma_{Y_j}^2 + \sigma_{Y_i}^2)} \right] \cdot \left(\frac{648000}{\pi} \right)$$

Cálculo do ângulo irradiado entre três pontos em função de suas coordenadas planimétricas

Considere I = ângulo irradiado, sendo i o vértice de ré, j o vértice de estação e k o vértice de vante; Az_{ji} = azimuth do ponto j ao ponto i ; Az_{jk} = azimuth do ponto j ao ponto k ; X_i = coordenada leste do ponto i ; Y_i = coordenada norte do ponto i ; X_j = coordenada leste do ponto j ; Y_j = coordenada norte do ponto j ; X_k = coordenada leste do ponto k ; Y_k = coordenada norte do ponto k ; $C = 0, +360^\circ$ ou -360° , em função do resultado obtido para I :

$$I = Az_{jk} - Az_{ji} = \tan^{-1} \left(\frac{X_k - X_j}{Y_k - Y_j} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{X_i - X_j}{Y_i - Y_j} \right) + C$$

$$\sigma_I = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial Y_i}\right)^2 \sigma_{Y_i}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial X_j}\right)^2 \sigma_{X_j}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial Y_j}\right)^2 \sigma_{Y_j}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial X_k}\right)^2 \sigma_{X_k}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial Y_k}\right)^2 \sigma_{Y_k}^2} \right] \cdot \left(\frac{648000}{\pi}\right)$$

Considerando $(X_k - X_j)^2 = \Delta X_{jk}^2$; $(Y_k - Y_j)^2 = \Delta Y_{jk}^2$; $(X_i - X_j)^2 = \Delta X_{ji}^2$; $(Y_i - Y_j)^2 = \Delta Y_{ji}^2$; $DH_{jk}^2 = \Delta X_{jk}^2 + \Delta Y_{jk}^2$; $DH_{ji}^2 = \Delta X_{ji}^2 + \Delta Y_{ji}^2$ e as relações apresentadas no cálculo do azimuth entre dois pontos em função das suas coordenadas planimétricas, a expressão para a precisão do ângulo irradiado se torna:

$$\sigma_I = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{\Delta Y_{jk}}{DH_{jk}^2}\right)^2 (\sigma_{X_j}^2 + \sigma_{X_k}^2) + \left(\frac{\Delta X_{jk}}{DH_{jk}^2}\right)^2 (\sigma_{Y_j}^2 + \sigma_{Y_k}^2) + \left(\frac{\Delta Y_{ji}}{DH_{ji}^2}\right)^2 (\sigma_{X_j}^2 + \sigma_{X_i}^2) + \left(\frac{\Delta X_{ji}}{DH_{ji}^2}\right)^2 (\sigma_{Y_j}^2 + \sigma_{Y_i}^2)} \right] \cdot \left(\frac{648000}{\pi}\right)$$

Cálculo da distância geométrica (tridimensional) entre dois pontos *i* e *j* em função de suas coordenadas cartesianas planialtimétricas

Considere DI = distância inclinada/geométrica/3D entre os pontos *i* e *j*; X_i = coordenada leste do ponto *i*; Y_i = coordenada norte do ponto *i*; Z_i = cota ou altitude do ponto *i*; X_j = coordenada leste do ponto *j*; Y_j = coordenada norte do ponto *j*; Z_i = cota ou altitude do ponto *j*:

$$DI = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$

σ_{DI}

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial DI}{\partial X_j}\right)^2 \sigma_{X_j}^2 + \left(\frac{\partial DI}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \left(\frac{\partial DI}{\partial Y_j}\right)^2 \sigma_{Y_j}^2 + \left(\frac{\partial DI}{\partial Y_i}\right)^2 \sigma_{Y_i}^2 + \left(\frac{\partial DI}{\partial Z_j}\right)^2 \sigma_{Z_j}^2 + \left(\frac{\partial DI}{\partial Z_i}\right)^2 \sigma_{Z_i}^2}$$

$$\frac{\partial DI}{\partial X_j} = \frac{(X_j - X_i)}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}, \quad \frac{\partial DI}{\partial X_i} = \frac{(X_i - X_j)}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}$$

$$\frac{\partial DI}{\partial Y_j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}, \quad \frac{\partial DI}{\partial Y_i} = \frac{(Y_i - Y_j)}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}$$

$$\frac{\partial DI}{\partial Z_j} = \frac{(Z_j - Z_i)}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}, \quad \frac{\partial DI}{\partial Z_i} = \frac{(Z_i - Z_j)}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}$$

Considerando $(X_i - X_j)^2 = (X_j - X_i)^2 = \Delta X^2$, $(Y_i - Y_j)^2 = (Y_j - Y_i)^2 = \Delta Y^2$, $(Z_i - Z_j)^2 = (Z_j - Z_i)^2 = \Delta Z^2$, a expressão para a precisão da distância inclinada/geométrica/3D entre os dois pontos se torna:

$$\sigma_{DI} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{D_I}\right)^2 (\sigma_{X_j}^2 + \sigma_{X_i}^2) + \left(\frac{\Delta Y}{D_I}\right)^2 (\sigma_{Y_j}^2 + \sigma_{Y_i}^2) + \left(\frac{\Delta Z}{D_I}\right)^2 (\sigma_{Z_j}^2 + \sigma_{Z_i}^2)}$$

Observações: Para obtenção somente da distância horizontal ou planimétrica (DH) entre os pontos i e j e a sua respectiva precisão (σ_{DH}), considerar as cotas ou altitudes dos pontos i e j e as suas respectivas precisões como sendo nulas; ou, para obtenção somente da distância vertical ou desnível (DN) entre os pontos i e j e a sua respectiva precisão (σ_{DN}), considerar as coordenadas horizontais (planimétricas) dos pontos i e j e as suas respectivas precisões como sendo nulas.

Posicionamento relativo GNSS

Considere X_0, Y_0, Z_0 = coordenadas cartesianas tridimensionais do ponto conhecido (estação base); X, Y, Z = coordenadas cartesianas tridimensionais do ponto desconhecido (receptor móvel); $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ = diferenças entre as coordenadas cartesianas tridimensionais dos pontos:

$$X = X_0 + \Delta X, \quad Y = Y_0 + \Delta Y, \quad Z = Z_0 + \Delta Z$$

$$\sigma_X = \pm \sqrt{\sigma_{X_0}^2 + \sigma_{\Delta X}^2}, \quad \sigma_Y = \pm \sqrt{\sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{\Delta Y}^2}, \quad \sigma_Z = \pm \sqrt{\sigma_{Z_0}^2 + \sigma_{\Delta Z}^2}$$

Para a precisão tridimensional resultante do ponto desconhecido, considere $\sigma_{3D} = \pm \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}$.

Método do alinhamento

Considere X_0 = coordenada leste do ponto inicial; Y_0 = coordenada norte do ponto inicial; X_2 = coordenada leste do ponto final; Y_2 = coordenada norte do ponto final; X_1 = coordenada leste do novo ponto do alinhamento; Y_1 = coordenada norte do novo ponto do alinhamento; $\hat{D}_{02}$ = distância do ponto inicial ao ponto final do alinhamento (calculada em função de suas coordenadas); D_{01} = distância do ponto inicial ao novo ponto; D_{02} = distância do ponto inicial ao ponto final do alinhamento (obtida por medição):

$$X_1 = X_0 + \frac{D_{01}}{\hat{D}_{02}} (X_2 - X_0) \cdot k, \quad Y_1 = Y_0 + \frac{D_{01}}{\hat{D}_{02}} (Y_2 - Y_0) \cdot k; \quad \text{com } k = \frac{D_{01}}{D_{02}}$$

σ_{X_1}

$$= \pm \sqrt{\left(1 - k \cdot \frac{D_{01}}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{X_0}^2 + \left(k \cdot \frac{D_{01}}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{X_2}^2 + \left(\frac{X_2 - X_0}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{D_{01}}^2 + \left(-k \cdot \frac{D_{01}(X_2 - X_0)}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{D_{02}}^2 + \left(-\frac{D_{01}^2(X_2 - X_0)}{D_{02}^2 \cdot \hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{D_{02}}^2}$$

σ_{Y_1}

$$= \pm \sqrt{\left(1 - k \cdot \frac{D_{01}}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{Y_0}^2 + \left(k \cdot \frac{D_{01}}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{Y_2}^2 + \left(k \cdot \frac{Y_2 - Y_0}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{D_{01}}^2 + \left(-k \cdot \frac{D_{01}(Y_2 - Y_0)}{\hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{D_{02}}^2 + \left(-\frac{D_{01}^2(Y_2 - Y_0)}{D_{02}^2 \cdot \hat{D}_{02}}\right)^2 \sigma_{D_{02}}^2}$$

Observação: Note a precisão melhor (menor desvio-padrão) na posição do novo ponto pelo método do alinhamento em relação ao método polar, pois, todos os termos presentes na propagação de erros para as coordenadas do novo ponto são menores do que um, além de se desconsiderar observações angulares no cálculo, que são as maiores fontes de erros nas determinações planimétricas.

Intersecção angular por direções azimutais

Considere X = coordenada leste do ponto desconhecido; Y = coordenada norte do ponto desconhecido; X_1 = coordenada leste do primeiro ponto conhecido; Y_1 = coordenada norte do primeiro ponto conhecido; X_2 = coordenada leste do segundo ponto conhecido; Y_2 = coordenada norte do segundo ponto conhecido; Az_1 = azimute da direção do primeiro ponto conhecido ao ponto desconhecido; Az_2 = azimute da direção do segundo ponto conhecido ao ponto desconhecido; $\Delta X_{12} = X_2 - X_1$; $\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1$:

$$X = X_1 + (Y - Y_1) \tan Az_1, \quad Y = \frac{X_1 - (Y_1 \tan Az_1) - X_2 + (Y_2 \tan Az_2)}{(\tan Az_2 - \tan Az_1)}$$

$$\sigma_X = \pm \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + (\tan Az_1)^2 \sigma_Y^2 + (\tan Az_1)^2 \sigma_{Y_1}^2 + \left(\frac{Y - Y_1}{\cos^2 Az_1} \right)^2 \left(\sigma_{Az_1} \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}$$

$$\sigma_Y = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tan Az_2 - \tan Az_1} \right)^2 (\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2) + \left(\frac{\tan Az_1}{\tan Az_2 - \tan Az_1} \right)^2 \sigma_{Y_1}^2 + \left(\frac{\tan Az_2}{\tan Az_2 - \tan Az_1} \right)^2 \sigma_{Y_2}^2 + \left[\frac{(\tan Az_2 \Delta Y_{12}) - \Delta X_{12}}{(\sin Az_1 - \tan Az_2 \cos Az_1)^2} \right]^2 \left(\sigma_{Az_1} \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2 + \left[\frac{\Delta X_{12} - \tan Az_2 \Delta Y_{12}}{(\sin Az_2 - \tan Az_1 \cos Az_2)^2} \right]^2 \left(\sigma_{Az_2} \cdot \frac{\pi}{648000} \right)^2}$$

Cálculo da área plana pelo método de Gauss (regra do determinante)

Considere A = área planimétrica do polígono formado por n vértices; $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ = coordenadas planimétricas leste dos vértices do polígono (para $i = 1, 2, 3, \dots, n$); $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ = coordenadas planimétricas norte dos vértices do polígono (para $i = 1, 2, 3, \dots, n$):

$$A = \frac{1}{2} |(X_1 + X_2) \cdot (Y_1 - Y_2) + (X_2 + X_3) \cdot (Y_2 - Y_3) + \dots + (X_n + X_1) \cdot (Y_n - Y_1)|$$

$$\sigma_A =$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{Y_n - Y_2}{2} \right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{X_2 - X_n}{2} \right)^2 \sigma_{Y_1}^2 + \left(\frac{Y_1 - Y_3}{2} \right)^2 \sigma_{X_2}^2 + \left(\frac{X_3 - X_1}{2} \right)^2 \sigma_{Y_2}^2 + \dots + \left(\frac{Y_{n-1} - Y_1}{2} \right)^2 \sigma_{X_n}^2 + \left(\frac{X_1 - X_{n-1}}{2} \right)^2 \sigma_{Y_n}^2}$$

Nivelamento altimétrico por GNSS

Considere H = altitude ortométrica do ponto considerado; h = altitude geométrica (elipsoidal) do ponto considerado; N = ondulação (altura) geoidal no ponto considerado:

$$H = h - N$$

$$\sigma_H = \pm \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_N^2}$$

Se for empregado o método relativo de nivelamento altimétrico por GNSS entre dois pontos A e B , sendo A o ponto com altitude ortométrica conhecida e B o ponto com altitude ortométrica a se determinar, resulta em:

$$H_B = h_B + H_A - h_A - N_B + N_A$$

$$\sigma_{H_B} = \pm \sqrt{\sigma_{h_B}^2 + \sigma_{H_A}^2 + \sigma_{h_A}^2 + \sigma_{N_B}^2 + \sigma_{N_A}^2}$$

Assumindo $N_A \cong N_B$, resulta em:

$$H_B = h_B + H_A - h_A$$

$$\sigma_{H_B} = \pm \sqrt{\sigma_{h_B}^2 + \sigma_{H_A}^2 + \sigma_{h_A}^2 + \left(D_{AB} \cdot \frac{\varepsilon_{\Delta N}}{1000000}\right)^2}$$

onde D_{AB} é a distância elipsoidal entre os pontos A e B e $\varepsilon_{\Delta N}$ é o erro relativo resultante da aproximação $N_A \cong N_B$, em ppm (por exemplo, $\varepsilon_{\Delta N} = \pm 10 \text{ ppm}$).

Transformação de coordenadas geodésicas para coordenadas cartesianas geocêntricas

Considere X, Y, Z = coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto; φ = latitude geodésica do ponto; λ = longitude geodésica do ponto; h = altitude geométrica (elipsoidal) do ponto:

$$\begin{cases} X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{cases}$$

$$\sigma_X = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\sigma_\varphi \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 \left(\sigma_\lambda \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_Y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\sigma_\varphi \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 \left(\sigma_\lambda \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_Z = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\sigma_\varphi \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right)^2 \left(\sigma_\lambda \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \varphi} = -(M+h)\sin \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -(N+h)\cos \varphi \sin \lambda; & \frac{\partial X}{\partial h} = \cos \varphi \cos \lambda \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -(M+h)\sin \varphi \sin \lambda; & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = (N+h)\cos \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial Y}{\partial h} = \cos \varphi \sin \lambda \\ & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = (M+h)\cos \varphi; & \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0; & \frac{\partial Z}{\partial h} = \sin \varphi \end{cases}$$

Observações: considere $N =$ grande normal do ponto $= a / \sqrt{1 - e^2(\sin^2 \varphi)}$;
 $M =$ raio de curvatura da seção meridiana do ponto $= a (1 - e^2) / [1 - e^2(\sin^2 \varphi)]^{3/2}$;
 $a =$ semi-eixo maior do elipsóide de referência; $e^2 =$ primeira excentricidade ao quadrado do elipsóide de referência $= (a^2 - b^2) / b^2$.

Transformação de coordenadas cartesianas geocêntricas para coordenadas geodésicas

Considere $\varphi =$ latitude geodésica do ponto; $\lambda =$ longitude geodésica do ponto; $h =$ altitude geométrica (elipsoidal) do ponto; $X, Y, Z =$ coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto:

$$\begin{cases} \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{Z + [e'^2 b \sin^3 \theta]}{\sqrt{X^2 + Y^2} - [e^2 a \cos^3 \theta]} \right) \\ \lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) \\ h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial X} &= \left(\frac{\frac{3a^5 X Z^5 (a^2 - b^2)}{b^6 (X^2 + Y^2)^{7/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{5/2}} - \frac{3a^3 X Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{5/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}}}{\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} - \frac{\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{3a^2 a^3 X Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)^2 \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{5/2}} \right) \left(\frac{a^3 Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + Z \right)}{\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2} \right)^2} \right) \left/ \left(\frac{\left(\frac{a^3 Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + Z \right)^2}{\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2} \right)^2} + 1 \right) \right. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Y} &= \left(\frac{\frac{3a^5 Y Z^5 (a^2 - b^2)}{b^6 (X^2 + Y^2)^{7/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{5/2}} - \frac{3a^3 Y Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{5/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}}}{\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} - \frac{\left(\frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{3a^2 a^3 Y Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)^2 \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{5/2}} \right) \left(\frac{a^3 Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + Z \right)}{\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2} \right)^2} \right) \left/ \left(\frac{\left(\frac{a^3 Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + Z \right)^2}{\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2} \right)^2} + 1 \right) \right. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Z} &= \left(\frac{-\frac{3a^5 Z^4 (a^2 - b^2)}{b^6 (X^2 + Y^2)^{5/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{5/2}} + \frac{3a^3 Z^2 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + 1}{\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} - \frac{3e^2 a^3 Z \left(\frac{a^3 Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + Z \right)}{b^2 (X^2 + Y^2) \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{5/2} \left(\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2} \right)^2} \right) \left/ \left(\frac{\left(\frac{a^3 Z^3 (a^2 - b^2)}{b^4 (X^2 + Y^2)^{3/2} \left(\frac{a^2 Z^2}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2}} + Z \right)^2}{\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - \left(\frac{r^2 a}{b^2 (X^2 + Y^2)} + 1 \right)^{3/2} \right)^2} + 1 \right) \right.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X} = \frac{Y}{X^2 + Y^2}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial Y} = \frac{X}{X^2 + Y^2}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial X} = \frac{X \sec \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}}; \quad \frac{\partial h}{\partial Y} = \frac{Y \sec \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}}; \quad \frac{\partial h}{\partial Z} = 0$$

Observações: considere N = grande normal do ponto $= a / \sqrt{1 - e^2(\sec^2 \varphi)}$; a = semi-eixo maior do elipsóide de referência; b = semi-eixo menor do elipsóide de referência; e^2 = primeira excentricidade ao quadrado do elipsóide de referência $= (a^2 - b^2)/a^2$; e'^2 = segunda excentricidade ao quadrado do elipsóide de referência $= (a^2 - b^2)/b^2$;
 $\theta = \tan^{-1}[(Z \cdot a)/(\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot b)]$.

Transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas TM (UTM, LTM, RTM)

Considere φ = latitude geodésica do ponto; λ = longitude geodésica do ponto; $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ = diferença entre a longitude geodésica do ponto e do meridiano central do fuso (em radianos); E = coordenada este do ponto no sistema TM desejado; N = coordenada norte do ponto no sistema TM desejado; E' = coordenada este do meridiano central no sistema TM desejado; $N' = 0 \text{ m}$ (hemisfério norte) ou $N' = 10000 \text{ m}$ (hemisfério sul); k_0 = coeficiente de deformação linear do meridiano central no sistema TM desejado; S = comprimento de arco do meridiano, calculado em função da latitude geodésica e dos parâmetros do elipsóide de referência; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots =$

coeficientes calculados em função da latitude geodésica e dos parâmetros do elipsóide de referência:

$$E = E' + k_0(S + a_2 \cdot \Delta\lambda^2 + a_4 \cdot \Delta\lambda^4 + a_6 \cdot \Delta\lambda^6 + \dots)$$

$$N = N' + k_0(a_1 \cdot \Delta\lambda + a_3 \cdot \Delta\lambda^3 + a_5 \cdot \Delta\lambda^5 + \dots)$$

$$\sigma_E = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\sigma_\varphi \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)^2 \left(\sigma_\lambda \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\sigma_N = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\sigma_\varphi \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 \left(\sigma_\lambda \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \varphi} = & k_0 \left[S' + \frac{\Delta\lambda}{2} [-M \sin^2 \varphi + a_1 \cos \varphi] \Delta\lambda^2 + \frac{\Delta\lambda^4}{24} (-M \sin^2 \varphi + a_1 \cos \varphi) (-1 + 6 \cos^2 \varphi + 9 e^2 \cos^4 \varphi + 4 e^4 \cos^6 \varphi) \right. \\ & - \frac{\Delta\lambda^4 a^2}{12} (12 \cos \varphi \sin \varphi + 36 e^2 \cos^3 \varphi \sin \varphi + 24 e^4 \cos^5 \varphi \sin \varphi) + \frac{\Delta\lambda^6}{720} (-M \sin^2 \varphi + a_1 \cos \varphi) (-1 + 60 \cos^2 \varphi + 120 \cos^4 \varphi) \\ & \left. + \frac{\Delta\lambda^6 a_2}{360} (120 \cos \varphi \sin \varphi - 480 \cos^3 \varphi \sin \varphi) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = k_0 [2 a_2 (\lambda - \lambda_0) + 4 a_4 (\lambda - \lambda_0)^3 + 6 a_6 (\lambda - \lambda_0)^5]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \varphi} = & k_0 \left[-M \sin \varphi \Delta\lambda - \frac{M \sin \varphi \Delta\lambda^3}{6} (-1 + 2 \cos^2 \varphi + e^2 \cos^4 \varphi) - \frac{a_1 \Delta\lambda^3}{6} (4 \cos \varphi \sin \varphi + 4 e^2 \cos^3 \varphi \sin \varphi) \right. \\ & \left. - \frac{M \sin \varphi \Delta\lambda^5}{120} [1 - 20 \cos^2 \varphi + (24 - 58 e^2) \cos^4 \varphi + 72 e^2 \cos^6 \varphi] - \frac{a_1 \Delta\lambda^5}{120} [40 \cos \varphi \sin \varphi + (96 - 232 e^2) \cos^3 \varphi \sin \varphi + 432 e^2 \cos^5 \varphi \sin \varphi] \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = k_0 [a_1 + 3 a_3 (\lambda - \lambda_0)^2 + 5 a_5 (\lambda - \lambda_0)^4]$$

Transformação de coordenadas em sistemas TM para coordenadas geodésicas:

Considere φ = latitude geodésica do ponto (em radianos); λ = longitude geodésica do ponto (em radianos); λ_0 = longitude geodésica do meridiano central do fuso (em radianos); φ_1 = latitude geodésica correspondente ao arco de meridiano com comprimento $|E - E'|/k_0$ (em radianos); E = coordenada este do ponto no sistema TM considerado; N = coordenada norte do ponto no sistema TM considerado; E' = coordenada este do meridiano central no sistema TM considerado; $N' = 0$ m (hemisfério norte) ou $N' = 10000$ m (hemisfério sul); k_0 = coeficiente de deformação

linear do meridiano central no sistema TM considerado; $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots$ = coeficientes calculados em função da latitude geodésica φ_1 e dos parâmetros do elipsóide de referência:

$$\lambda = \lambda_0 + b_1 \cdot N + b_3 \cdot N^3 + b_5 \cdot N^5 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_1 + b_2 \cdot N^2 + b_4 \cdot N^4 + b_6 \cdot N^6 + \dots$$

$$\sigma_\lambda = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial N}\right)^2 \sigma_N^2 \cdot \left(\frac{\pi}{648000}\right)}$$

$$\sigma_\varphi = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)^2 \sigma_N^2 \cdot \left(\frac{\pi}{648000}\right)}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial E} = (b'_1 \cdot N + b'_3 \cdot N^3 + b'_5 \cdot N^5) \frac{\partial \varphi_1}{\partial E}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial N} = b_1 + (3 \cdot b_3 \cdot N^2) + (5 \cdot b_5 \cdot N^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial E} &= (1 + b'_2 \cdot N^2 + b'_4 \cdot N^4 + b'_6 \cdot N^6) \frac{\partial \varphi_1}{\partial E}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} \\ &= (2 \cdot b_2 \cdot N) + (4 \cdot b_4 \cdot N^3) + (6 \cdot b_6 \cdot N^5) \end{aligned}$$

Observações: considere $\partial \varphi_1 / \partial E$ = derivada parcial da latitude geodésica φ_1 em relação à coordenada E ; $b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5, b'_6$ = derivadas parciais dos coeficientes $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ em relação à latitude geodésica φ_1 .

Transformação de coordenadas cartesianas geocêntricas para cartesianas em sistema local

Considere e, n, u = coordenadas cartesianas do ponto no sistema local; φ_0 = latitude geodésica do vértice origem do sistema local; X, Y, Z = coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto; X_0, Y_0, Z_0 = coordenadas cartesianas geocêntricas do vértice origem do sistema local; e_0, n_0, u_0 = coordenadas cartesianas no sistema local do vértice origem do sistema local:

$$\begin{cases} e = -\sin \varphi_0 \cdot (X - X_0) + \cos \varphi_0 \cdot (Y - Y_0) + e_0 \\ n = -\cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot (X - X_0) - \sin^2 \varphi_0 \cdot (Y - Y_0) + \cos \varphi_0 \cdot (Z - Z_0) + n_0 \\ u = \cos^2 \varphi_0 \cdot (X - X_0) + \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot (Y - Y_0) + \sin \varphi_0 \cdot (Z - Z_0) + u_0 \end{cases}$$

σ_e

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial e}{\partial X}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial X_0}\right)^2 \sigma_{X_0}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial Y}\right)^2 \sigma_Y^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial Y_0}\right)^2 \sigma_{Y_0}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \varphi_0}\right)^2 \left(\sigma_{\varphi_0} \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

σ_n

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial X}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial X_0}\right)^2 \sigma_{X_0}^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial Y}\right)^2 \sigma_Y^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial Y_0}\right)^2 \sigma_{Y_0}^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial Z}\right)^2 \sigma_Z^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial Z_0}\right)^2 \sigma_{Z_0}^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi_0}\right)^2 \left(\sigma_{\varphi_0} \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

σ_u

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial X_0}\right)^2 \sigma_{X_0}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 \sigma_Y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y_0}\right)^2 \sigma_{Y_0}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Z}\right)^2 \sigma_Z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Z_0}\right)^2 \sigma_{Z_0}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi_0}\right)^2 \left(\sigma_{\varphi_0} \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial X} &= -\sin \varphi_0; \quad \frac{\partial e}{\partial X_0} = \sin \varphi_0; \quad \frac{\partial e}{\partial Y} = \cos \varphi_0; \quad \frac{\partial e}{\partial Y_0} \\ &= -\cos \varphi_0; \quad \frac{\partial e}{\partial \varphi_0} = -\cos \varphi_0 \cdot (X - X_0) - \sin \varphi_0 \cdot (Y - Y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial X} = -\cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0; \quad \frac{\partial n}{\partial X_0} = \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0; \quad \frac{\partial n}{\partial Y} = -\sin^2 \varphi_0; \quad \frac{\partial n}{\partial Y_0} = \sin^2 \varphi_0; \quad \frac{\partial n}{\partial Z} = \cos \varphi_0; \quad \frac{\partial n}{\partial Z_0} = -\cos \varphi_0; \\ \frac{\partial n}{\partial \varphi_0} = (\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \cdot (X - X_0) - (2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0) \cdot (Y - Y_0) - \sin \varphi_0 \cdot (Z - Z_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial X} = \cos^2 \varphi_0; \quad \frac{\partial u}{\partial X_0} = -\cos^2 \varphi_0; \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0; \quad \frac{\partial u}{\partial Y_0} = -\cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0; \quad \frac{\partial u}{\partial Z} = \sin \varphi_0; \quad \frac{\partial u}{\partial Z_0} = -\sin \varphi_0; \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi_0} = (-2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0) \cdot (X - X_0) + (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) \cdot (Y - Y_0) + \cos \varphi_0 \cdot (Z - Z_0) \end{cases}$$

Observações: Como as coordenadas e_0, n_0, u_0 são arbitrárias, assume-se $\sigma_{e_0} = \sigma_{n_0} =$

$\sigma_{u_0} = 0$.

Transformação de coordenadas cartesianas em sistema local para cartesianas geocêntricas

Considere X, Y, Z = coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto; φ_0 = latitude geodésica do vértice origem do sistema local; e, n, u = coordenadas cartesianas do ponto no sistema local; e_0, n_0, u_0 = coordenadas cartesianas no sistema local do vértice origem do sistema local; X_0, Y_0, Z_0 = coordenadas cartesianas geocêntricas do vértice origem do sistema local:

$$\begin{cases} X = -\sin \varphi_0 \cdot (e - e_0) - \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot (n - n_0) + \cos^2 \varphi_0 \cdot (u - u_0) + X_0 \\ Y = \cos \varphi_0 \cdot (e - e_0) - \sin^2 \varphi_0 \cdot (n - n_0) + \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot (u - u_0) + Y_0 \\ Z = \cos \varphi_0 \cdot (n - n_0) + \sin \varphi_0 \cdot (u - u_0) + Z_0 \end{cases}$$

$$\sigma_X$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial n}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \sigma_u^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial X_0}\right)^2 \sigma_{X_0}^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi_0}\right)^2 \left(\sigma_{\varphi_0} \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\sigma_Y$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial n}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 \sigma_u^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Y_0}\right)^2 \sigma_{Y_0}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi_0}\right)^2 \left(\sigma_{\varphi_0} \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\sigma_Z = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial n}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 \sigma_u^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Z_0}\right)^2 \sigma_{Z_0}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi_0}\right)^2 \left(\sigma_{\varphi_0} \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial e} = -\sin \varphi_0; \frac{\partial X}{\partial n} = -\cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0; \frac{\partial X}{\partial u} = \cos^2 \varphi_0; \frac{\partial X}{\partial X_0} = 1; \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi_0} = -\cos \varphi_0 \cdot (e - e_0) + (\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \cdot (Y - Y_0) - (2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0) \cdot (u - u_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial e} = \cos \varphi_0; \frac{\partial Y}{\partial n} = -\sin^2 \varphi_0; \frac{\partial Y}{\partial u} = -\sin^2 \varphi_0; \frac{\partial Y}{\partial Y_0} = 1; \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi_0} = -\sin \varphi_0 \cdot (e - e_0) + (2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0) \cdot (n - n_0) + (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) \cdot (u - u_0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = \cos \varphi_0; \frac{\partial Z}{\partial u} = \sin \varphi_0; \frac{\partial Z}{\partial Z_0} = 1; \frac{\partial Z}{\partial \varphi_0} = -\sin \varphi_0 \cdot (n - n_0) + \cos \varphi_0 \cdot (u - u_0)$$

Observações: Como as coordenadas e_0, n_0, u_0 são arbitrárias, assume-se $\sigma_{e_0} = \sigma_{n_0} = \sigma_{u_0} = 0$.

3.3 Propagação simplificada de erros em redes

Em uma rede topográfica ou geodésica, como poligonais planimétricas, circuitos de nivelamento altimétrico ou redes GNSS, tem-se múltiplas mensurações e vértices, o que aumenta a complexidade da propagação dos erros de observação sobre as posições dos vértices da rede. A propagação de erros em redes de forma rigorosa só pode ser realizada na forma matricial por meio da lei de propagação de variâncias e covariâncias.

Entretanto, uma estratégia de propagação de erros em rede de forma simplificada, que fornece resultados menos otimistas (isto é, mais conservadores) em relação à propagação de erros na forma matricial pode ser aplicada por meio dos formulários apresentados na sessão anterior.

Ressalta-se que a propagação de erros a cada novo vértice aumenta conforme este se afasta do(s) ponto(s) de controle da rede. Desta forma, uma maneira de realizar a propagação de erros em rede, de modo simplificado e com resultados conservadores, é dada pelas seguintes etapas:

- 1) Realizar a propagação de erros simplificada partindo da primeira (ou única) base conhecida da rede, efetuando a propagação dos erros das medições e da determinação do vértice anterior para cada novo vértice da rede;
- 2) Para redes com uma única base conhecida, realizar a propagação de erros simplificada partindo da base conhecida, mas, no sentido contrário ao realizado em 1), ou seja, iniciando no último vértice desconhecido da rede. Para redes com duas bases, realizar a propagação de erros simplificada partindo da última base conhecida da rede, efetuando a propagação dos erros das medições e da determinação do vértice anterior para cada novo vértice da rede como em 1);
- 3) Para cada vértice, adotar como desvio-padrão para sua(s) coordenada(s) a solução que apresentar o menor resultado, ou seja, a maior precisão.

3.4 Exemplos de propagação de erros em levantamentos

Exemplo 1: Calcular as coordenadas e a precisão do ponto 35, utilizando os dados dos pontos de apoio A e B e da caderneta de campo abaixo. Considere o erro de centragem como $\varepsilon = 1,5 \text{ mm}$.

 INSTITUTO FEDERAL SANTA CATARINA		Ministério da Educação Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA CURSO TECNICO DE AGRIMENSURA		
		LEVANTAMENTO PLANIMÉTRICO SERVIÇO: ATUALIZAÇÃO CAMPUS FLORIANÓPOLIS DATA: 18/08/2015 EQUIPAMENTO: TRIMBLE S7 σNL: ±(1mm+2ppm) σND: ±3" OPERADOR: ALUNOS TURMA 1480111 FOLHA: 2/2		
ESTAÇÃO	PONTO VISADO	ÂNGULO HORIZONTAL	DISTÂNCIA HORIZONTAL	DESCRIÇÃO
A	B	00° 00' 00"	—	RÉ
	35	128° 05' 42"	73,219	MURO
	36	77° 10' 46"	17,118	EDIFICAÇÃO
	37	196° 34' 21"	59,321	EDIFICAÇÃO

PONTO	X	Y
A	150034,2374 ± 0,0050 m	251349,7201 ± 0,0074 m
B	149818,1230 ± 0,0103 m	251420,0821 ± 0,0152 m

$$DH = 227,280 \text{ m} \quad Az_{RÉ} = 288^\circ 02' 03''$$

$$Az = 288^\circ 02' 03'' + 128^\circ 05' 42'' = 56^\circ 07' 45''$$

$$X_{35} = 150095,0308 \text{ m} \quad Y_{35} = 251390,5268 \text{ m}$$

$$\sigma_{DI} = \pm \left(0,001 + 0,002 \frac{73,219}{1000} \right) = \pm 0,0011 \text{ m}$$

$$\sigma_I = \pm \sqrt{2 \cdot 3^2 + \left(\frac{972}{\pi} \frac{\sqrt{227,280^2 + 73,219^2}}{227,280 \cdot 73,219} \right)^2} = \pm 6,1''$$

$$\sigma_{Az_{RÉ}} = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{251349,7201 - 251420,0821}{227,280^2} \right)^2 (0,0103^2 + 0,005^2) + \left(\frac{150034,2374 - 149818,123}{227,280^2} \right)^2 (0,0152^2 + 0,0074^2)} \right] \cdot \left(\frac{648000}{\pi} \right)$$

$$\sigma_{AZ_{RÉ}} = \pm 14,9''$$

$$\sigma_{Az} = \pm \sqrt{14,9^2 + 6,1^2} = \pm 16,2''$$

$$\sigma_{X_{35}} = \pm \sqrt{0,005^2 + (\sin 56^\circ 07' 45'')^2 \cdot 0,0011^2 + (227,280 \cdot \cos 56^\circ 07' 45'')^2 \cdot \left(16,2 \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\sigma_{X_{35}} = \pm 0,0060 \text{ m}$$

$$\sigma_{Y_{35}} = \pm \sqrt{0,0074^2 + (\cos 56^\circ 07' 45'')^2 \cdot 0,0011^2 + (227,280 \cdot \sin 56^\circ 07' 45'')^2 \cdot \left(16,2 \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\sigma_{Y_{35}} = \pm 0,0089 \text{ m}$$

$$\sigma_{2D} = \pm \sqrt{0,0060^2 + 0,0089^2} = \pm 0,0107 \text{ m}$$

Exemplo 2: Calcular a cota e a precisão do ponto A1 com os dados da caderneta a seguir. Considere: $H_{RN80} = 9,315 \text{ m} \pm 3,4 \text{ mm}$.

 INSTITUTO FEDERAL SANTA CATARINA		Ministério da Educação Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA CURSO TECNICO DE AGRIMENSURA			
		NIVELAMENTO GEOMÉTRICO			
SERVIÇO: CONSTRUÇÃO GINÁSIO 2		DATA: 20/06/2015			
EQUIPAMENTO: LEICA SPRINTER 150		$\sigma_L = 0,6 \text{ mm}/30 \text{ m}$			
OPERADOR: ALUNOS TURMA 1480231		FOLHA: 1/1			
ESTAÇÃO	PONTO VISADO	LEITURA		DH	OBSERVAÇÃO
		RE	VANTE		
01	RN80	1,335		60,325	
	A1		1,511	55,078	

$$k = \frac{0,0006 \text{ m}}{30 \text{ m}} = 0,00002$$

$$\overline{DH} = (60,325 \text{ m} + 55,078 \text{ m})/2 = 57,7015 \text{ m}$$

$$\sigma_{H_{A1}} = \pm \sqrt{(0,0034)^2 + 2 \cdot (0,00002 \cdot 57,7015)^2}$$

$$\sigma_{H_{A1}} = \pm 0,0038 \text{ m} = \pm 3,8 \text{ mm}$$

Exemplo 3: Considerando que o desvio-padrão da altitude do ponto de estação é $\sigma_{HI} = \pm 2,3 \text{ cm}$ (0,023 m) e que foi utilizada uma estação total *Topcon GTS 235*, cuja precisão nominal angular é $\pm 5''$ e linear é $\pm (2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$, calcule o desvio-padrão da altitude do ponto levantado P20. Considere o erro de medição da altura do instrumento e do sinal do refletor como sendo cerca de $\pm 2 \text{ mm}$.



INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
NÚCLEO DE TOPOGRAFIA
LABORATÓRIO DE TOPOGRAFIA

NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO

SERVIÇO: Levantamento planialtimétrico do campus DATA: 15/09/2003

PROPRIETÁRIO: IFSC CIDADE: Florianópolis

LOCAL: Campus Florianópolis

OPERADOR: Alunos Turma 1480111 FOLHA: 1/5

EST.	i	PTO	h	Z	DI	OBSERVAÇÃO
E01	1,498 m	P20	1,55 m	90° 03' 11"	26,479 m	meio-fio

$$\sigma_{HP_{20}} = \pm \sqrt{(0,023)^2 + 0,000008 + (\cos 90^\circ 03' 11'')^2 \cdot (0,002)^2 + (26,479 \cdot \sin 90^\circ 03' 11'')^2 \cdot \left(5 \cdot \frac{\pi}{648000}\right)^2}$$

$$\sigma_{HP_{20}} = \pm \sqrt{0,0005370}$$

$$\sigma_{HP_{20}} = \pm 0,0232 \text{ m}$$

Exemplo 4: Calcular a altitude e precisão do ponto B, utilizando os dados a seguir: $h_B = 145,036 \text{ m} \pm 18,4 \text{ mm}$ (obtido por GNSS); $N_B = -8,26 \text{ m} \pm 170 \text{ mm}$ (extraído do MAPGEO2015).

$$H_B = h_B - N_B = 145,036 - (-8,26) = 153,296 \text{ m}$$

$$\sigma_{H_B} = \pm \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_N^2} = \pm \sqrt{0,0084^2 + 0,17^2} = \pm 0,171 \text{ mm}$$

$$H_B = 153,296 \pm 0,171 \text{ m}$$

Exemplo 5: Calcular a altitude e a precisão do ponto B pelo método relativo de nivelamento altimétrico por GNSS, utilizando os dados abaixo. Considere $\varepsilon_{\Delta N} = \pm 10 \text{ ppm}$.

- $h_B = 145,036 \text{ m} \pm 18,4 \text{ mm};$
- $H_A = 87,211 \text{ m} \pm 12,7 \text{ mm};$
- $h_A = 78,901 \text{ m} \pm 6,1 \text{ mm};$
- $D_{AB} = 14723,098 \text{ m}$

$$H_B = 145,036 + 87,211 - 78,901 = 153,346 \text{ m}$$

$$\sigma_{H_B} = \pm \sqrt{0,0184^2 + 0,0127^2 + 0,0061^2 + \left(\frac{14723,098 \cdot 10}{1000000}\right)^2} = \pm 0,149 \text{ m}$$

$$H_B = 153,346 \pm 0,149 \text{ m}$$

Exemplo 6: Calcule o perímetro e a área do polígono formado pelos vértices de divisa de acordo com a tabela a seguir.

Vértice do imóvel	Coordenada X (m)	Coordenada Y (m)	σ_X (m)	σ_Y (m)
P1	100,000	500,000	$\pm 0,023$	$\pm 0,017$
P2	112,014	499,981	$\pm 0,048$	$\pm 0,025$
P3	112,006	530,011	$\pm 0,016$	$\pm 0,039$
P4	105,733	516,945	$\pm 0,031$	$\pm 0,044$
P5	100,019	529,983	$\pm 0,052$	$\pm 0,028$

Solução: Cada um dos cinco lados do perímetro do imóvel é obtido em função das coordenadas dos vértices de divisa correspondentes, por meio da equação da distância horizontal, resultando em:

$$l_1 = \sqrt{(112,014 - 100,000)^2 + (499,981 - 500,000)^2} = 12,014 \text{ m}$$

$$l_2 = \sqrt{(112,006 - 112,014)^2 + (530,011 - 499,981)^2} = 30,030 \text{ m}$$

$$l_3 = \sqrt{(105,733 - 112,006)^2 + (516,945 - 530,011)^2} = 14,494 \text{ m}$$

$$l_4 = \sqrt{(100,019 - 105,733)^2 + (529,983 - 516,945)^2} = 14,235 \text{ m}$$

$$l_5 = \sqrt{(100,000 - 100,019)^2 + (500,000 - 529,983)^2} = 29,983 \text{ m}$$

O perímetro é obtido somando-se os cinco lados do imóvel, o que resulta em:

$$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 100,756 \text{ m}$$

O desvio-padrão de cada lado do imóvel é obtido pelo formulário de propagação dos erros das coordenadas dos vértices para as distâncias horizontais entre estes (consultar a apostila da disciplina), resultando em:

$$\begin{aligned}\sigma_{l_1} &= \pm \sqrt{\left(\frac{112,014 - 100,000}{12,014}\right)^2 \cdot (0,023^2 + 0,048^2) + \left(\frac{499,981 - 500,000}{12,014}\right)^2 \cdot (0,017^2 + 0,025^2)} \\ &= \pm 0,053 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{l_2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{112,006 - 112,014}{30,030}\right)^2 \cdot (0,048^2 + 0,016^2) + \left(\frac{530,11 - 499,981}{30,030}\right)^2 \cdot (0,025^2 + 0,039^2)} \\ &= \pm 0,046 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{l_3} &= \pm \sqrt{\left(\frac{105,733 - 112,006}{14,494}\right)^2 \cdot (0,016^2 + 0,031^2) + \left(\frac{516,945 - 530,11}{14,494}\right)^2 \cdot (0,039^2 + 0,044^2)} \\ &= \pm 0,055 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{l_4} &= \pm \sqrt{\left(\frac{100,019 - 105,733}{14,235}\right)^2 \cdot (0,031^2 + 0,052^2) + \left(\frac{529,983 - 516,945}{14,235}\right)^2 \cdot (0,044^2 + 0,028^2)} \\ &= \pm 0,054 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{l_5} &= \pm \sqrt{\left(\frac{100,000 - 100,019}{29,983}\right)^2 \cdot (0,052^2 + 0,023^2) + \left(\frac{500,000 - 529,983}{29,983}\right)^2 \cdot (0,028^2 + 0,017^2)} \\ &= \pm 0,033 \text{ m}\end{aligned}$$

O desvio-padrão do perímetro do imóvel é obtido pelo formulário de propagação dos erros dos lados do imóvel para a extensão total deste (consultar a apostila da disciplina), resultando em:

$$\sigma_P = \pm \sqrt{0,053^2 + 0,046^2 + 0,055^2 + 0,054^2 + 0,033^2} = \pm 0,109 \text{ m}$$

A área do imóvel é obtida por meio da regra do determinante (ou método de Gauss), resultando em:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} |(100 + 112,014) \cdot (500 - 499,981) + (112,014 + 112,006) \cdot (499,981 - 530,011) + (112,006 + 105,733) \\
 &\quad \cdot (530,011 - 516,945) + (105,733 + 100,019) \cdot (516,945 - 529,983) + (100,019 + 100) \cdot (529,983 - 500)| \\
 &= 281,87 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

O desvio-padrão da área do imóvel é obtido pelo formulário de propagação dos erros das coordenadas dos vértices sobre a área (consultar a apostila da disciplina), resultando em:

$$\begin{aligned}
 \sigma_A &= \\
 &\pm \sqrt{\left[\left(\frac{529,983 - 499,981}{2} \right)^2 \cdot (0,023)^2 + \left(\frac{112,014 - 100,019}{2} \right)^2 \cdot (0,017)^2 \right] + \left[\left(\frac{500 - 530,011}{2} \right)^2 \cdot (0,048)^2 + \left(\frac{112,006 - 100}{2} \right)^2 \cdot (0,025)^2 \right] +} \\
 &\quad \left[\left(\frac{499,981 - 516,945}{2} \right)^2 \cdot (0,016)^2 + \left(\frac{105,733 - 112,014}{2} \right)^2 \cdot (0,039)^2 \right] + \left[\left(\frac{530,011 - 529,983}{2} \right)^2 \cdot (0,031)^2 + \left(\frac{100,019 - 112,006}{2} \right)^2 \cdot (0,044)^2 \right] +} \\
 &\quad \left[\left(\frac{516,945 - 500}{2} \right)^2 \cdot (0,052)^2 + \left(\frac{100 - 105,733}{2} \right)^2 \cdot (0,028)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\sigma_A = \pm 0,92 \text{ m}^2$$

4. AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES POR MÍNIMOS QUADRADOS

Conforme visto no Capítulo 1, os objetivos da Teoria dos Erros são estimar a melhor solução (solução mais provável) para um dado problema em função da amostra observada; bem como, estimar a qualidade desta solução, ou seja, o quanto a solução mais provável pode diferir da solução “verdadeira”. A primeira questão está diretamente relacionada com a estimação de grandezas incógnitas, ou seja, com a solução numérica do problema, enquanto a segunda questão está diretamente relacionada com a propagação dos erros de observação, introduzida no capítulo anterior.

Em Topografia e Geodésia, a maior parte dos problemas relaciona grandezas mensuradas, como ângulos e distâncias, com grandezas incógnitas a se determinar, como coordenadas de pontos de interesse, por meio de relações matemáticas conhecidas, sendo algumas destas apresentadas no Capítulo 3. Desta forma, inicialmente, considere o seguinte caso geral de sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1u}x_u \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2u}x_u \\&\vdots \\y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nu}x_u\end{aligned}$$

Onde:

- $y_1, y_2, \dots, y_n$ são as n observações ou medidas realizadas;
- $x_1, x_2, \dots, x_u$ são os u parâmetros incógnitos do modelo a serem estimados;
- a_{ij} para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, u$ são os coeficientes da função linear adotada, que relaciona as grandezas observadas ($y_1, y_2, \dots, y_n$) com as grandezas desconhecidas que se deseja estimar ($x_1, x_2, \dots, x_u$).

Matematicamente, para solucionar o sistema de equações, deve-se ter um número de observações n igual ao número de parâmetros u que se deseja estimar, ou seja, $n = u$, caso contrário, o sistema não admite solução única e exata.

Entretanto, as observações possuem uma propriedade inerente a elas, conhecida como flutuações probabilísticas, pois, quando se repete “ n ” vezes a medida de uma grandeza, os n valores não são idênticos, mas estão dispersos numa certa região ou intervalo. Essas flutuações, tradicionalmente, são classificadas como erros aleatórios e são inevitáveis no processo de medição, sendo uma propriedade intrínseca da observação. Isto faz com que o sistema de equações exposto acima se torne matematicamente inconsistente, quando $n > u$.

No contexto do ajustamento, o número de observações deve ser maior do que o número de parâmetros incógnitos, ou seja, $n > u$, tornando o sistema de equações abundante (redundante). Se as observações fossem valores exatos, isentos de erros e perfeitamente concordantes com o modelo matemático adotado, se teria um sistema abundante (pois $n > u$), porém, matematicamente consistente, isto é, com solução única e exata.

Admitindo a inevitável presença de erros aleatórios nas observações, como uma característica intrínseca do processo experimental de medições, pode-se adicionar em cada equação do sistema linear, um erro e_i referente à respectiva observação y_i , resultando em:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1u}x_u + e_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2u}x_u + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nu}x_u + e_n \end{aligned}$$

Desta forma, adicionando n erros de observação, que tal como os valores dos parâmetros, são desconhecidos *a priori*, o sistema de equações será sempre consistente, porém, com infinitas soluções, pois quaisquer valores que forem arbitrados para os parâmetros terão um respectivo conjunto de valores derivados para os erros aleatórios, e vice-versa. Resta então, decidir qual a “melhor solução” dentre as infinitas possibilidades. Portanto, um critério de ajustamento das observações originais, para obtenção de solução única do sistema, deve ser utilizado.

Antes de tratar do ajustamento por mínimos quadrados, mais algumas considerações sobre os erros que contaminam as observações e o sistema de equações se fazem necessárias. Por exemplo, na implantação de uma rede geodésica, o problema

consiste basicamente em: dado um conjunto de observações realizadas, como por exemplo, medidas de desníveis entre pares de pontos, estimar o conjunto de parâmetros de interesse, como por exemplo, as cotas ou altitudes dos pontos de uma rede de nivelamento altimétrico; bem como a sua precisão, por meio de um modelo matemático conhecido que estabeleça a relação entre as observações e os parâmetros.

O modelo matemático envolve tanto o modelo funcional quanto o modelo estocástico. O modelo funcional é o conjunto de equações que definem as condições do ajustamento, devendo estas ser conhecidas ou estipuladas. O modelo estocástico consiste na determinação das variâncias e covariâncias, e consequentemente, dos pesos das observações.

Por exemplo, no caso do nivelamento altimétrico, o sistema de equações pode ser formado por equações do tipo: $\Delta H_{ij} = H_j - H_i$, onde ΔH_{ij} é a observação de desnível entre dois pontos i e j , H_i e H_j são respectivamente as altitudes a se determinar dos pontos i e j . Cada desnível ΔH_{ij} apresentará um desvio-padrão associado ($\sigma_{\Delta H_{ij}}$), obtido, por exemplo, em função da precisão nominal do instrumento utilizado, sendo o modelo funcional formado pelo conjunto de equações do tipo $\Delta H_{ij} = H_j - H_i$ e o modelo estocástico formado pelas respectivas variâncias dos desníveis ($\sigma_{\Delta H_{ij}}^2$), assumindo covariâncias nulas entre estes. Diversos modelos matemáticos envolvidos em problemas de Topografia e Geodésia são apresentados no capítulo anterior.

Quanto às observações, o modelo matemático pode envolver observações diretas, observações diretas condicionadas ou observações indiretas. Observações diretas ocorrem quando as incógnitas do problema são as próprias grandezas mensuradas, como por exemplo, quando se deseja determinar a distância entre dois pontos por meio de sucessivas medições de distâncias entre eles. Nestes casos, a média aritmética e a média ponderada são, respectivamente, as soluções mais prováveis caso as observações apresentem a mesma precisão ou diferentes precisões.

Observações diretas condicionadas são observações diretas que se relacionam por meio de equações de condição, como por exemplo, a relação geométrica de que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a π radianos. Nestes casos, pode-se formar equações do tipo erro de fechamento angular em um polígono para ajustar as observações de tal modo que o erro de fechamento angular após o ajustamento das observações originais seja nulo.

Observações indiretas ocorrem quando os parâmetros do problema não são diretamente as grandezas mensuradas, mas se relacionam com estas por meio de um modelo matemático, como por exemplo, uma poligonal em um plano topográfico, onde são medidos ângulos e distâncias entre os vértices da poligonal para se determinar as suas coordenadas por meio de relações trigonométricas conhecidas. Em Topografia e Geodésia, a maioria dos problemas pode ser expresso e solucionado como um sistema de observações indiretas, denominadas “equações de observação”.

Devido a inevitável existência de erros nas observações, que resulta na inconsistência do sistema de equações, utiliza-se de observações redundantes no ajustamento (ou seja, $n > u$), sendo duas as principais razões para isto: a primeira visa melhorar a acurácia dos resultados estimados, e a segunda visa detectar a possível presença de erros (não aleatórios) nos modelos e/ou nas observações.

Dentre os diversos critérios possíveis para o ajustamento das observações, o mais difundido e aceito em Geodésia e áreas afins é aquele que segue o princípio dos mínimos quadrados, ou seja, aquele que minimiza a soma do quadrado dos resíduos, ponderados pelos respectivos pesos das observações.

4.1 O método dos mínimos quadrados (MMQ) em sistemas lineares

Inicialmente, considera-se novamente um sistema de equações lineares, mas desta vez, expresso na forma matricial:

$$y_{nx1} = A_{nxu}x_{ux1} + e_{nx1}$$

Onde:

- y_{nx1} é o vetor das n observações ou medidas realizadas (dados originais);
- A_{nxu} é a matriz dos coeficientes das equações lineares (matriz *design*);
- x_{ux1} é o vetor dos u parâmetros incógnitos do modelo a serem estimados;
- e_{nx1} é o vetor dos n erros de observação, admitindo a inconsistência do sistema.

Desta forma, o problema que se deseja solucionar é: dado o vetor das observações y e o funcional A que relaciona linearmente as observações com os

parâmetros, admitindo a inconsistência deste sistema de n equações, qual é a melhor estimativa para o vetor dos parâmetros x e para o vetor dos erros de observação e ?

Para o caso em que se têm apenas duas observações (y_1, y_2) e uma incógnita (x), a matriz *design* $A_{n \times u}$ se torna um vetor $a_{2 \times 1}$ (pois $n = 2$ e $u = 1$), e uma visualização do problema é obtida por meio da figura a seguir:

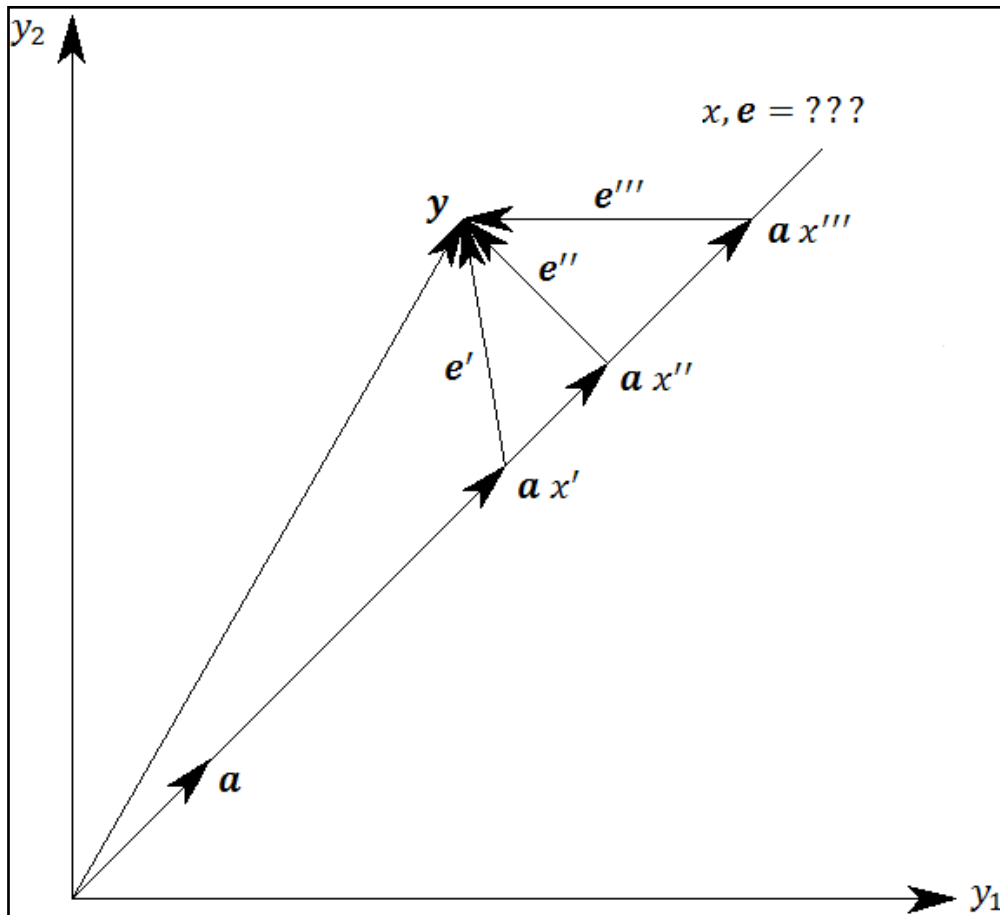


Figura 4.1 – Diferentes soluções para um problema de duas observações y_1, y_2 e um parâmetro x .

Analisando a Figura 4.1 e a expressão anterior, nota-se que para cada escolha distinta do parâmetro x , têm-se um correspondente vetor de erros e associado, sendo o sistema de equações original, redundante e inconsistente, transformado em um sistema de equações consistente, porém, com infinitas soluções, devido ao acréscimo do vetor dos erros de observação ao sistema, pois agora se tem n equações a $(u + n) > n$ incógnitas, que são o valor de x e as duas componentes do vetor e .

O vetor dos erros de observações, por meio de uma simples manipulação algébrica, pode ser expresso como:

$$e = y - Ax$$

No MMQ, cujo princípio já foi definido, busca-se como estimativa para o vetor dos parâmetros x aquela cuja soma do quadrado dos resíduos, ou, analogamente, dos erros aparentes, apresentar valor mínimo, ou seja:

$$(y - Ax)_{1 \times n}^T (y - Ax)_{n \times 1} = \text{Mínimo}$$

onde o sobrescrito T denota a operação de transposição matricial, e o produto interno entre um vetor e o seu transposto expressa o quadrado de sua norma (ou módulo), ou seja, a soma do quadrado das componentes deste vetor.

Considerando agora uma matriz peso para as observações, simétrica e positiva-definida, designada por $W_{n \times n}$, o critério se torna:

$$(y - Ax)_{1 \times n}^T W_{n \times n} (y - Ax)_{n \times 1} = \text{Mínimo}$$

onde os elementos da matriz W podem ser escolhidos para ponderar a influência de observações específicas sobre a estimativa do vetor dos parâmetros x . Observações com peso maior terão maior importância no processo de ajustamento, ou seja, maior influência na estimação dos parâmetros. Usualmente, a matriz peso é definida como sendo igual ao inverso da matriz de covariância das observações (Σ_y), ou seja: $W = \Sigma_y^{-1}$.

Logo, quanto maior a variância (isto é, pior a precisão), menor é o peso da observação no processo de ajustamento, ou, em outras palavras, menor é a sua influência sobre os resultados finais (parâmetros ajustados). Para um caso envolvendo duas observações, com $n = 2$ e $u = 1$, onde

$$y_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, a_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, W_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ e } x_{1 \times 1} = x, \text{ a equação anterior torna-se:}$$

$$w_{11}(y_1 - a_1x)^2 + 2w_{12}(y_1 - a_1x)(y_2 - a_2x) + w_{22}(y_2 - a_2x)^2 = \text{Mínimo}$$

Na expressão anterior é utilizada a propriedade de simetria da matriz $W_{2 \times 2}$, de forma que $w_{12} = w_{21}$. Retornando ao caso geral da matriz W com dimensão $n \times n$, realizando as operações matriciais e denotando esta soma ponderada do quadrado dos erros aparentes por $F(x)$, ou seja, como função do vetor dos parâmetros x estimado, tem-se:

$$F(x) = y_{1xn}^T W_{n \times n} y_{nx1} - 2y_{1xn}^T W_{n \times n} A_{n \times u} x_{ux1} + x_{1xu}^T A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u} x_{ux1}$$

Pela teoria do cálculo vetorial, sabe-se que esta função apresentará um valor $F(x) = \text{Mínimo}$ quando o vetor dos parâmetros x for um vetor estimado $\hat{x}$ tal que:

$$\begin{cases} \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=\hat{x}} = 0 \\ \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x=\hat{x}} > 0 \end{cases}$$

Aplicando as condições acima na expressão anterior, resulta em:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(\hat{x}) = -2A_{uxn}^T W_{n \times n} y_{nx1} + 2A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u} \hat{x}_{ux1} = 0_{ux1} \\ \frac{d^2 F}{dx^2}(\hat{x}) = 2A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u} > 0_{ux1} \end{cases}$$

A Figura 4.2 ilustra esta condição de $F(x) = \text{Mínimo}$ para uma função de apenas uma variável, ou seja, com $u = 1$.

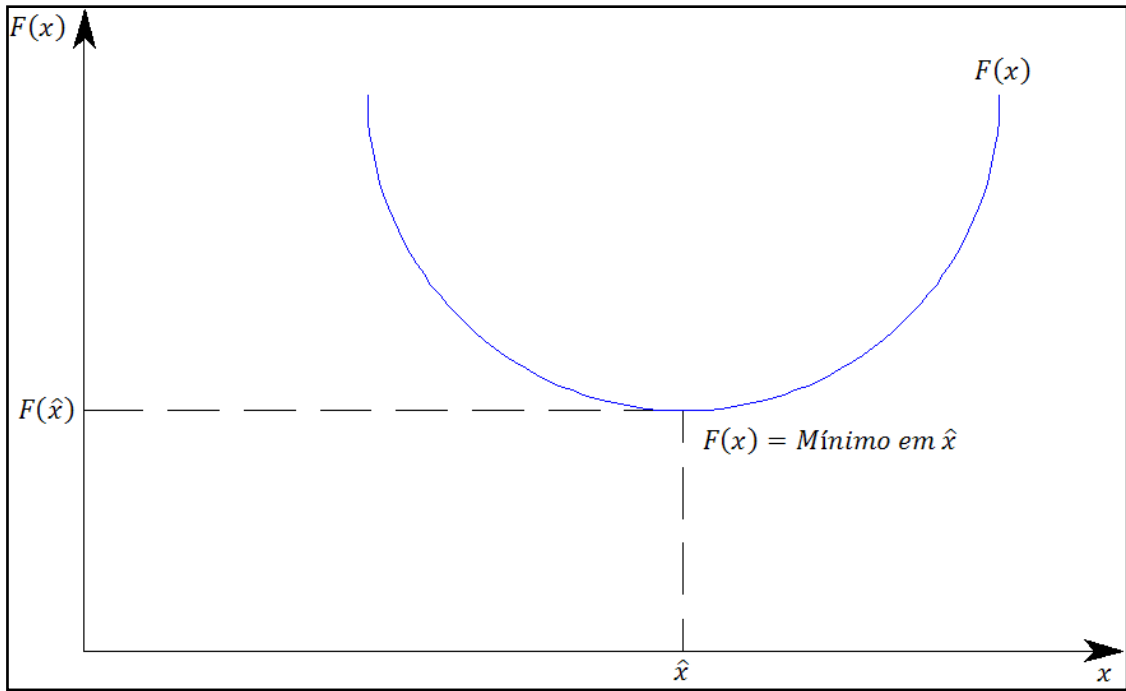


Figura 4.2 – Valor para o parâmetro x que minimiza a $F(x)$ soma ponderada do quadrado dos erros aparentes.

Como a matriz peso W é assumida ser positiva-definida e simétrica, a segunda condição, ou seja, a garantia de ser um ponto de mínimo, é sempre satisfeita. Para a primeira condição, realizando as operações matriciais, e isolando o vetor $\hat{x}$, resulta em:

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W y$$

sendo $\hat{x}$ a estimativa por mínimos quadrados do vetor dos parâmetros, ou seja, o vetor dos parâmetros ajustados. O vetor das observações ajustadas $\hat{y}$ é obtido aplicando o vetor dos parâmetros ajustados ao modelo linear, resultando em:

$$\hat{y} = A\hat{x} = [A(A^T W A)^{-1} A^T W] y$$

Finalmente, o vetor dos erros aparentes ou ajustados $\hat{e}$ pode ser obtido por:

$$\hat{e} = y - \hat{y} = [I - A(A^T W A)^{-1} A^T W] y$$

sendo $\hat{e}$ a estimativa por mínimos quadrados do vetor dos erros de observação, ou simplesmente vetor dos erros aparentes, e I é a matriz identidade $n \times n$. Os sobrescritos “^” nas expressões acima ilustram o fato dos vetores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{e}$, ou seja, as soluções pelo

MMQ para x , y e e , se tratarem de estimativas obtidas em função da amostra, ou seja, do conjunto de observações realizadas. O vetor dos resíduos v corresponde ao vetor dos erros aparentes com o sinal trocado, ou seja: $\hat{v} = -\hat{e}$.

Note que para a solução do ajustamento pelo MMQ, deve-se definir apenas o vetor das observações y em função dos dados de campo, a matriz *design* A em função das equações de observação, e a matriz peso W em função das precisões e eventuais correlações das observações. Todos os demais elementos são obtidos em função de y , A e W .

No processo de estimação, parte dos erros das observações (vetor y) é absorvida no vetor dos parâmetros ajustados ($\hat{x}$) e parte é refletida no vetor dos erros ajustados ($\hat{e}$), sendo o ideal a absorção nula em $\hat{x}$ e a reflexão total em $\hat{e}$. Quanto maior o número de observações, maior a redundância do sistema e mais a solução pelo MMQ se aproxima desta condição ideal, devido ao comportamento dos erros aleatórios apresentado no Capítulo 1.

Além da obtenção dos parâmetros, das observações, e dos erros ajustados (vetores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{e}$), o ajustamento pelo MMQ permite ainda a obtenção da matriz de covariância dos parâmetros ajustados ($\Sigma_{\hat{x}}$), da matriz de covariância das observações ajustadas ($\Sigma_{\hat{y}}$), e da matriz de covariância dos erros ajustados ($\Sigma_{\hat{e}}$), pela lei de propagação das variâncias e covariâncias das observações originais (vetor y_{nx1}) sobre cada um destes três vetores estimados pelo ajustamento.

Desta forma, a matriz de covariância dos parâmetros ajustados é dada por:

$$\Sigma_{\hat{x}} = N_{u \times u}^{-1}$$

sendo a matriz N dada por $N = A^T W A$. Para o vetor dos parâmetros ajustados $\hat{y} = A\hat{x}$, a matriz de covariância é dada por:

$$\Sigma_{\hat{y}} = A \Sigma_{\hat{x}} A^T = [A N^{-1} A^T]_{n \times n}$$

Finalmente, para o vetor dos erros aparentes $\hat{e} = y - \hat{y}$, a matriz de covariância é dada por:

$$\Sigma_{\hat{e}} = \Sigma_y - \Sigma_{\hat{y}} = W_{n \times n}^{-1} - [A N^{-1} A^T]_{n \times n}$$

Como as variâncias são sempre positivas, analisando a última expressão, nota-se que a variância de um erro ajustado é sempre menor que a variância da respectiva observação original ($\sigma_{\hat{e}_i}^2 < \sigma_{y_i}^2$), pois $\sigma_{\hat{e}_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{y}_i}^2$. Da mesma forma, a variância de uma observação ajustada é sempre menor do que a variância de sua observação original ($\sigma_{\hat{y}_i}^2 < \sigma_{y_i}^2$), pois $\sigma_{\hat{y}_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{e}_i}^2$.

Estas expressões fornecem a propagação dos erros das observações de forma rigorosa sobre os vetores $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{e}$, uma vez que consideram as correlações (covariâncias) entre as grandezas envolvidas, ao contrário das expressões apresentadas no Capítulo 3. Desta forma, elas expressam a precisão destas estimativas pelo MMQ, pois, conforme já visto, quanto menor é a variância de uma grandeza estimada, mais preciso é o valor desta grandeza.

4.2 Comentários gerais sobre o ajustamento pelo MMQ

Além das observações e dos parâmetros, tem-se ainda as injunções, isto é, valores previamente conhecidos, que podem ser absolutas (permanecendo fixas após o ajustamento) ou relativas (podendo ser ajustadas em função de suas precisões no processo de ajustamento, também denominadas de “pseudo-observações”). Em Topografia e Geodésia, exemplos de injunções são as coordenadas dos pontos de apoio, que podem permanecer fixas no ajustamento (injunções absolutas), ou podem ser ajustadas por meio de suas respectivas precisões, quando assim desejado (injunções relativas).

Se as observações estão contaminadas somente por erros aleatórios e a matriz peso é definida adequadamente como $W = \Sigma_y^{-1}$, o MMQ é o melhor estimador linear imparcial para os parâmetros e também coincide com a solução de máxima verossimilhança (solução mais provável). Entretanto, o MMQ não é um estimador robusto, isto é, insensível a presença de erros grosseiros nas observações. Se houverem erros grosseiros, estes irão afetar a solução do MMQ e estas propriedades ótimas não serão mais satisfeitas.

Para a detecção e identificação de erros grosseiros e/ou sistemáticos, aplica-se algum método de controle de qualidade do ajustamento, como por exemplo, o teste global para detecção de erros no ajustamento, seja no modelo funcional/equações, no modelo estocástico/ponderação das observações, no cálculo numérico do ajustamento, nas injunções/condições ou nas observações/dados de campo.

No caso da suspeita de erros nas observações, utiliza-se ainda do procedimento de teste *Data Snooping* para a identificação das observações suspeitas de estarem contaminadas por erros grosseiros, segundo um nível de significância previamente estipulado, como por exemplo, $\alpha = 0,01$ (1%). O nível de significância é o complemento do nível de confiança (NC), ou seja: $\alpha = 1 - NC$. Em outras palavras, se o nível de significância adotado for de $\alpha = 0,01$ (1%), espera-se que uma vez a cada cem experimentos, uma observação não contaminada por erro grosseiro seja erroneamente identificada como contaminada por erro grosseiro (Erro Tipo 1).

Além disso, por meio da análise de covariância, é possível obter intervalos de confiança, como elipses e elipsoides, para as posições dos pontos ajustados, como por exemplo, elipses de confiança para vértices de uma poligonal ou elipsoides de confiança para vértices de uma rede GNSS, com $NC = 0,99$ (99%). Elipses e elipsoides de confiança são muito úteis na análise da propagação dos erros aleatórios das observações sobre os vértices de uma rede de referência, por exemplo.

É importante ressaltar que as matrizes de covariância e a análise de covariância fornecem informações somente sobre a propagação esperada dos erros aleatórios das observações. Em outras palavras, a análise de covariância não fornece informações a respeito dos erros verdadeiros em cada ponto, especialmente no caso do vetor das observações também conter erros sistemáticos e/ou grosseiros.

Se as equações são inicialmente não lineares em relação aos parâmetros, como por exemplo, equações envolvendo funções trigonométricas, deve ser realizada uma linearização por série de Taylor em torno de um vetor de parâmetros aproximados (x_0) e processos iterativos de ajustamento até a convergência da solução. Nestes casos, a matriz A se torna a matriz das derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros, aplicadas ao vetor dos parâmetros aproximados (x_0), também denominada matriz Jacobiana.

Derivadas parciais de diversas equações empregadas em Topografia e Geodésia são apresentadas no Capítulo 3. Mais detalhes sobre o ajustamento de observações pelo MMQ podem ser obtidos na Dissertação de Mestrado “*Controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas*” (Klein, I. 2012).

4.3 Exemplo numérico de ajustamento pelo MMQ

Como exemplo numérico de ajustamento pelo MMQ, considere o seguinte problema de determinação dos parâmetros de transformação do sistema de coordenadas local da estação total (x,y) para as coordenadas no sistema de projeção UTM (E,N).

Para a determinação dos quatro parâmetros da transformação conforme de Helmert (fator de escala entre os dois sistemas, ângulo de rotação entre a orientação dos dois sistemas, e translações da origem das coordenadas este e norte dos dois sistemas), três pontos de apoio tiveram suas coordenadas no sistema de projeção UTM determinadas por posicionamento GNSS e no sistema local da estação total por meio de irradiações topográficas em um ponto de estação livre, conforme apresenta a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Coordenadas (E,N) e (x,y) dos três pontos de apoio.

Ponto	Coordenada E (m)		Coordenada N (m)		Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
1	1070,054	$\pm 0,01$	5152,419	$\pm 0,021$	923,316	5021,899
2	1214,126	$\pm 0,016$	5195,430	$\pm 0,009$	1062,777	5077,130
3	1176,497	$\pm 0,018$	5029,258	$\pm 0,014$	1039,816	4908,687

Note que, para fins de simplificação, foram suprimidos os dois primeiros dígitos da coordenada este (E) e os três primeiros dígitos da coordenada norte (N) dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM, uma vez que estes valores são constantes. Além disso, foram desconsideradas as precisões das coordenadas (x,y) dos pontos de apoio no sistema local da estação total. O número de parâmetros incógnitos do problema é $u = 4$ (parâmetros de transformação do sistema local da estação total para o sistema de projeção UTM), e o número de observações é $n = 3 \times 2 = 6$ (coordenadas E,N dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM). Logo, o número de observações redundantes (graus de liberdade) é $n - u = 6 - 4 = 2$.

Note que com dois pontos de apoio tem-se $n = 2 \times 2 = 4$ observações para $u = 4$ parâmetros, ou seja, é possível determinar os quatro parâmetros de transformação, mas não é possível realizar o ajustamento, uma vez que não se tem redundância no problema, pois neste caso, $n - u = 4 - 4 = 0$.

O sistema de $n = 6$ equações de observação para este problema 2D de transformação de coordenadas é dado pelo modelo matemático da transformação isogonal (ou conforme de Helmert):

$$E_1 = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c$$

$$N_1 = -b \cdot x_1 + a \cdot y_1 + d$$

$$E_2 = a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c$$

$$N_2 = -b \cdot x_2 + a \cdot y_2 + d$$

$$E_3 = a \cdot x_3 + b \cdot y_3 + c$$

$$N_3 = -b \cdot x_3 + a \cdot y_3 + d$$

onde E_i, N_i são as coordenadas dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM (para $i = 1, 2, 3$); x_i, y_i são as coordenadas dos pontos de apoio no sistema local da estação total (para $i = 1, 2, 3$); e a, b, c, d são os quatro parâmetros de transformação do sistema local da estação total (x, y) para o sistema de projeção UTM (E, N) .

No caso, $a = \lambda \cdot \cos \theta$ e $b = \lambda \cdot \sin \theta$, sendo λ o fator de escala entre os dois sistemas, e θ o ângulo de rotação existente entre a orientação dos dois sistemas. Os parâmetros c e d correspondem, respectivamente, a translação (diferença na origem) entre as coordenadas este (x, E) e norte (y, N) dos dois sistemas.

Como se trata de um sistema de equações lineares em relação aos parâmetros, não é necessário um vetor de parâmetros aproximados e nem iterações para a convergência do ajustamento. As derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros são dadas por:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\delta X_i}{\delta a} = x_i, & \frac{\delta X_i}{\delta b} = y_i, & \frac{\delta X_i}{\delta c} = 1, & \frac{\delta X_i}{\delta d} = 0 \\ \frac{\delta Y_i}{\delta a} = y_i, & \frac{\delta Y_i}{\delta b} = -x_i, & \frac{\delta Y_i}{\delta c} = 0, & \frac{\delta Y_i}{\delta d} = 1 \end{array}$$

Desta forma, a matriz *design* do ajustamento (matriz A), de dimensão $n \times u = 6 \times 4$, tem a seguinte estrutura:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & -x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ y_3 & -x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1070,074 & 5152,459 & 1 & 0 \\ 5152,459 & -1070,074 & 0 & 1 \\ 1214,106 & 5195,410 & 1 & 0 \\ 5195,410 & -1214,106 & 0 & 1 \\ 1176,477 & 5029,278 & 1 & 0 \\ 5029,278 & -1176,477 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz A transposta (A^T) é obtida pela transposição dos elementos da matriz *design* A , isto é, pela inversão de suas linhas e colunas. Desta forma, a matriz A transposta, de dimensão $u \times n = 4 \times 6$, é dada por:

$$A^T = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \\ y_1 & -x_1 & y_2 & -x_2 & y_3 & -x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1070,074 & 5152,459 & 1214,106 & 5195,410 & 1176,477 & 5029,278 \\ 5152,459 & -1070,074 & 5195,410 & -1214,106 & 5029,278 & -1176,477 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância das observações (Σ_y) é formada pelas variâncias (elementos da diagonal principal da matriz) e covariâncias (elementos fora da diagonal principal da matriz) das observações, ou seja, das coordenadas dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM (E, N). Assumindo covariâncias (ou correlações) nulas para as observações, para fins de simplificação, a matriz de covariância, de dimensão $n \times n = 6 \times 6$, tem a seguinte estrutura:

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} \sigma_{E_1}^2 & \sigma_{E_1, N_1} & \sigma_{E_1, E_2} & \sigma_{E_1, N_2} & \sigma_{E_1, E_3} & \sigma_{E_1, N_3} \\ \sigma_{E_1, N_1} & \sigma_{N_1}^2 & \sigma_{N_1, E_2} & \sigma_{N_1, N_2} & \sigma_{N_1, E_3} & \sigma_{N_1, N_3} \\ \sigma_{E_1, E_2} & \sigma_{N_1, E_2} & \sigma_{E_2}^2 & \sigma_{E_2, N_2} & \sigma_{E_2, E_3} & \sigma_{E_2, N_3} \\ \sigma_{E_1, N_2} & \sigma_{N_1, N_2} & \sigma_{E_2, N_2} & \sigma_{N_2}^2 & \sigma_{N_2, E_3} & \sigma_{N_2, N_3} \\ \sigma_{E_1, E_3} & \sigma_{N_1, E_3} & \sigma_{E_2, E_3} & \sigma_{N_2, E_3} & \sigma_{E_3}^2 & \sigma_{E_3, N_3} \\ \sigma_{E_1, N_3} & \sigma_{N_1, N_3} & \sigma_{E_2, N_3} & \sigma_{N_2, N_3} & \sigma_{E_3, N_3} & \sigma_{N_3}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,01^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,021^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,016^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,009^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,018^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,014^2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000441 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,000081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,000324 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,000196 \end{bmatrix}$$

A matriz peso das observações (W), de dimensão $n \times n = 6 \times 6$, é igual ao inverso da matriz de covariância das observações, ou seja, $W = \Sigma_y^{-1}$. Como a matriz de covariância das observações é uma matriz diagonal, ou seja, cujos elementos fora da diagonal principal (covariâncias) são nulos, o peso de uma observação é igual ao inverso de sua covariância, ou seja, $w_i = 1/\sigma_i^2$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Em outras palavras, quanto maior o desvio-padrão (variância) de uma observação, menor é a sua precisão, e, portanto, menor é o seu peso (influência) no processo de ajustamento. Desta forma, a matriz peso das observações é dada por:

$$W = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{E_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{N_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{E_2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_{N_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_{E_3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_{N_3}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0,000441 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0,000256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/0,000081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/0,000324 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/0,000196 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2267,574 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3906,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12345,679 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3086,42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5102,041 \end{bmatrix}$$

O vetor das observações (y), de dimensão $n \times 1 = 6 \times 1$, é dado pelas coordenadas dos pontos de controle no sistema de projeção UTM (E,N). Desta forma, o vetor das observações y tem a seguinte estrutura:

$$y = \begin{bmatrix} E_1 \\ N_1 \\ E_2 \\ N_2 \\ E_3 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1070,054 \\ 5152,419 \\ 1214,126 \\ 5195,430 \\ 1176,497 \\ 5029,258 \end{bmatrix}$$

O vetor dos parâmetros (x), de dimensão $u \times 1 = 4 \times 1$, é formado pelos quatros parâmetros de transformação do sistema local da estação total para o sistema de projeção UTM (parâmetros a,b,c,d). Desta forma, o vetor dos parâmetros x tem a seguinte estrutura:

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Como as observações (coordenadas dos pontos de controle no sistema de projeção UTM) possuem erros, não existe solução única e exata para os quatro parâmetros de transformação a serem determinados. Admitindo a inconsistência do sistema de equações, devido aos erros de observação, e aplicando o método dos mínimos quadrados (MMQ), a solução do problema, isto é, o vetor dos parâmetros ajustados, é dada por:

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W y = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix}$$

Efetuada as operações matriciais na expressão acima por meio de um *software* computacional, resulta em:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0,99843742 \\ 0,08716394 \\ -289,546 \\ 218,868 \end{bmatrix}$$

Logo, como resultado do ajustamento, tem-se os quatro parâmetros de transformação do sistema local da estação total (x,y) para o sistema de projeção UTM (E,N), estimados em função dos três pontos de apoio:

$$\hat{a} = 0,99843742$$

$$\hat{b} = 0,08716394$$

$$\hat{c} = -289,546 \text{ m}$$

$$\hat{d} = 218,868 \text{ m}$$

O vetor das observações ajustadas ($\hat{y}$) é dado pelas coordenadas ajustadas dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM (E,N), obtidas por meio da aplicação dos parâmetros de transformação ajustados às coordenadas dos pontos de apoio no sistema local da estação total. Desta forma, o vetor das observações ajustadas ($\hat{y}$) é dado por (elementos de $\hat{y}$ em metros):

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{N}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{N}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{N}_3 \end{bmatrix} = A\hat{x}$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1070,074 & 5152,459 & 1 & 0 \\ 5152,459 & -1070,074 & 0 & 1 \\ 1214,106 & 5195,410 & 1 & 0 \\ 5195,410 & -1214,106 & 0 & 1 \\ 1176,477 & 5029,278 & 1 & 0 \\ 5029,278 & -1176,477 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,99843742 \\ 0,08716394 \\ -289,546 \\ 218,868 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1070,056 \\ 5152,440 \\ 1214,113 \\ 5195,429 \\ 1176,506 \\ 5029,251 \end{bmatrix}$$

O vetor dos resíduos do ajustamento ($\hat{v}$) é dado pela diferença entre as observações ajustadas e as observações originais, ou seja, pela diferença entre as coordenadas ajustadas dos pontos de controle no sistema de projeção UTM (E,N) e as coordenadas originais (conhecidas) dos pontos de controle no sistema de projeção UTM. Desta forma, o vetor dos resíduos ($\hat{v}$) é dado por (elementos de $\hat{v}$ em metros):

$$\hat{v} = \hat{y} - y = \begin{bmatrix} 1070,056 \\ 5152,440 \\ 1214,113 \\ 5195,429 \\ 1176,506 \\ 5029,251 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1070,054 \\ 5152,419 \\ 1214,126 \\ 5195,430 \\ 1176,497 \\ 5029,258 \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,021 \\ -0,013 \\ -0,001 \\ 0,008 \\ -0,007 \end{bmatrix}$$

Note que os valores dos resíduos são da ordem de milímetros ou centímetros, o que é um indicativo da qualidade do ajustamento. Se houvessem resíduos da ordem de decímetros ou metros, este fato poderia indicar problemas no ajustamento, como a presença de erros grosseiros nas observações, uma vez que a precisão das coordenadas dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM é da ordem de poucos centímetros.

Sobre os parâmetros de transformação ajustados, a sua matriz de covariância ($\Sigma_{\hat{x}}$) é dada por:

$$\Sigma_{\hat{x}} = (A^T W A)^{-1}$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \left(\begin{bmatrix} 1070,074 & 5152,459 & 1214,106 & 5195,410 & 1176,477 & 5029,278 \\ 5152,459 & -1070,074 & 5195,410 & -1214,106 & 5029,278 & -1176,477 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2267,574 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3906,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12345,679 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3086,42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5102,041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1070,074 & 5152,459 & 1 & 0 \\ 5152,459 & -1070,074 & 0 & 1 \\ 1214,106 & 5195,410 & 1 & 0 \\ 5195,410 & -1214,106 & 0 & 1 \\ 1176,477 & 5029,278 & 1 & 0 \\ 5029,278 & -1176,477 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0,0000000059490 & 0,0000000012930 & -0,0000122928176 & -0,0000285611402 \\ 0,0000000012930 & 0,0000000116850 & -0,0000598517669 & 0,0000056613267 \\ -0,0000122928176 & -0,0000598517669 & 0,3121619205478 & -0,0004951151000 \\ -0,0000285611402 & 0,0000056613267 & -0,0004951151000 & 0,1495251904235 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal da matriz de covariância dos parâmetros ajustados correspondem às respectivas variâncias destes parâmetros. Portanto, para obter o desvio-padrão de cada parâmetro ajustado, basta extrair a raiz quadrada do respectivo elemento da diagonal principal da matriz de covariância. Desta forma, os desvios-padrões dos parâmetros ajustados são dados por:

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{0,0000000059490} = \pm 0,00007713$$

$$\sigma_{\hat{b}} = \sqrt{0,0000000116850} = \pm 0,00010810$$

$$\sigma_{\hat{c}} = \sqrt{0,3121619205478} = \pm 0,559 \text{ m}$$

$$\sigma_{\hat{d}} = \sqrt{0,1495251904235} = \pm 0,387 \text{ m}$$

Sobre os parâmetros da transformação conforme de Helmert, conforme apresentado, $a = \lambda \cos \theta$, $b = \lambda \sin \theta$, $c = \Delta X$ e $d = \Delta Y$, sendo λ o fator de escala entre os dois sistemas de referência, θ o ângulo de rotação (diferença de orientação entre os eixos) dos dois sistemas de referência, ΔX e ΔY as duas translações (diferenças de origem) entre os dois sistemas de referência. Portanto, resolvendo o sistema de equações para λ e θ e aplicando a lei de propagação de variâncias e covariâncias (desenvolvimento matemático aqui omitido para fins didáticos), resulta em:

$$\lambda = 1,00223492 \pm 0,00175282 \left(\lambda = \frac{1}{447,4433} \text{ ou ainda } \lambda = 2235 \text{ ppm} \right)$$

$$\theta = 4^\circ 59' 45'' \pm 22,21''$$

$$\Delta X = -289,54 \pm 0,559 \text{ m}$$

$$\Delta Y = 218,868 \pm 0,387 \text{ m}$$

Para o ponto de estação livre, cujas coordenadas no sistema local da estação total foram arbitradas em $x_0 = 1.000 \text{ m}$ e $y_0 = 5.000 \text{ m}$, as coordenadas no sistema de projeção UTM (E_0 , N_0), aplicando os parâmetros de transformação ajustados, são dadas por:

$$E_0 = \hat{a} \cdot x_0 + \hat{b} \cdot y_0 + \hat{c} = (\lambda \cos \theta) \cdot x_0 + (\lambda \sin \theta) \cdot y_0 + \Delta X$$

$$N_0 = -\hat{b} \cdot x_0 + \hat{a} \cdot y_0 + \hat{d} = -(\lambda \sin \theta) \cdot x_0 + (\lambda \cos \theta) \cdot y_0 + \Delta Y$$

$$E_0 = 0,99843742 \cdot 1000 + 0,08716394 \cdot 5000 + (-289,54) = 1144,712 \text{ m}$$

$$N_0 = -0,08716394 \cdot 1000 + 0,99843742 \cdot 5000 + 218,868 = 5123,8915 \text{ m}$$

Aplicando a lei de propagação de variância e covariância dos parâmetros de transformação ajustados sobre as coordenadas transformadas no sistema de projeção UTM do ponto de estação livre (desenvolvimento matemático aqui omitido para fins didáticos), resulta em:

$$E_0 = 1144,712 \pm 0,008 \text{ m}$$

$$N_0 = 5123,8915 \pm 0,0084 \text{ m}$$

Note que, embora as coordenadas dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM tenham precisão centimétrica, e, os parâmetros de translação ajustados ($\hat{c} = \Delta X$ e $\hat{d} = \Delta Y$) tenham precisão decimétrica, as coordenadas do ponto de estação livre no sistema de projeção UTM (E_0 , N_0), obtidas por meio dos quatro parâmetros de transformação ajustados, apresentam precisão milimétrica, em função do fato de serem utilizados três pontos de apoio para determinação dos parâmetros de transformação, possibilitando o ajustamento com $n - u = 6 - 4 = 2$ graus de liberdade, além da distribuição espacial dos pontos de apoio, muito próxima a de um triângulo equilátero e isóscele (ver a Figura 4.3), além ainda de serem desconsideradas as precisões das coordenadas dos pontos de apoio no sistema de referência local da estação total (x, y), assumidas, para fins de simplificação, como sendo nulas no ajustamento.

Quanto mais pontos de controle, quanto melhor a distribuição espacial destes e quanto melhor a precisão de suas coordenadas, melhor a qualidade obtida para os parâmetros de transformação, e, conseqüentemente, melhor a qualidade dos pontos de estação livre transformados para o sistema de referência desejado (no caso deste exemplo, sistema de projeção UTM). Na elaboração da Figura 4.3, foram desconsiderados os dois primeiros dígitos da coordenada este (E) e os três primeiros dígitos da coordenada norte (N) dos pontos de apoio no sistema de projeção UTM, uma vez que estes valores são constantes. Além disso, o fator de escala (isto é, fator de ampliação do triângulo azul em relação ao triângulo vermelho), para fins de melhor visualização, apresenta exagero de representação.

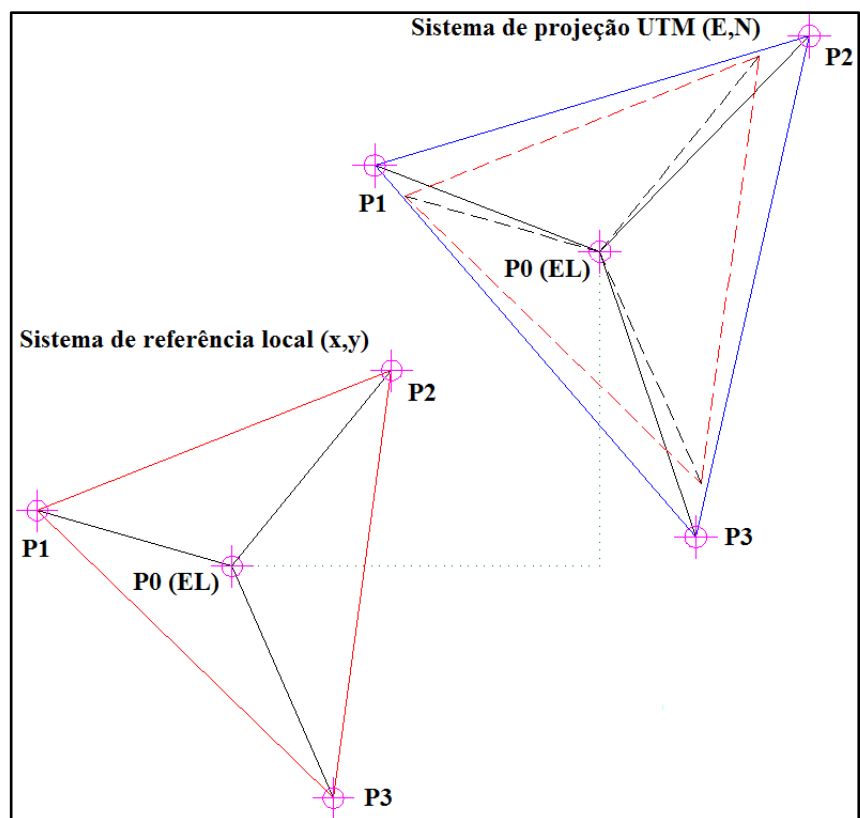


Figura 4.3 – Representação gráfica da transformação do sistema local (x,y) para o sistema UTM (E,N).